# Hacer Matemática

**Carmen Sessa** (coordinadora)
Valeria Borsani - Matías Dalvarade - Patricia Duarte Lezcano
Cecilia Lamela - Rodolfo Murúa




estrada
Seguimos haciendo historia




# Hacer Matemática





**Autores**
Carmen Sessa (coordinadora)
Valeria Borsani
Matías Dalvarade
Patricia Duarte Lezcano
Cecilia Lamela
Rodolfo Murúa



**Lectora crítica**
Marina Andrés

**Editora**
Samantha Matos

**Editora del Área de Matemática**
Evelyn Orfano

**Coordinadora de Diseño**
Natalia Otranto

**Gerenta editorial**
Judith Rasnosky







# Hacer Matemática 2 / 3

es un proyecto ideado y realizado por el **Departamento Editorial de Estrada S. A.**

**Corrección:** Laura Susín.

**Realización gráfica y diseño de interior:** Estudio Golum (Silvia Prado y Verónica Trombetta).

**Fotografías:** 123RF y Archivo de imágenes Grupo Macmillan.

**Ilustraciones:** Marcela Colace.

**Gerencia de Preprensa y Producción editorial:** Carlos Rodríguez.

Hacer matemática 2/3 / Carmen Sessa ... [et al.]. - 1a ed. - Boulogne :
Estrada, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-01-1998-6

1. Matemática. 2. Educación Primaria. I. Sessa, Carmen
CDD 372.7


Editorial Estrada S. A. forma parte del Grupo Macmillan.
Av. Blanco Encalada 104, San Isidro, provincia de Buenos Aires, Argentina.
Internet: www.editorialestrada.com.ar
Obra registrada en la Dirección Nacional de Derechos de Autor.
Hecho el depósito que marca la Ley 11.723.
Impreso en Argentina.
*Printed in Argentina.*

ISBN 978-950-01-1998-6

La presente obra se ha elaborado teniendo en cuenta los aportes surgidos de los encuentros organizados por el Instituto Nacional contra la Discriminación, la Xenofobia y el Racismo (Inadi) con los editores de texto.




# Hacer Matemática



Primera edición.
Esta obra se terminó de imprimir en octubre de 2016,
en los talleres de Artes Gráficas Graficor, Adolfo Alsina 1564,
Vicente López, provincia de Buenos Aires, Argentina.





# Índice

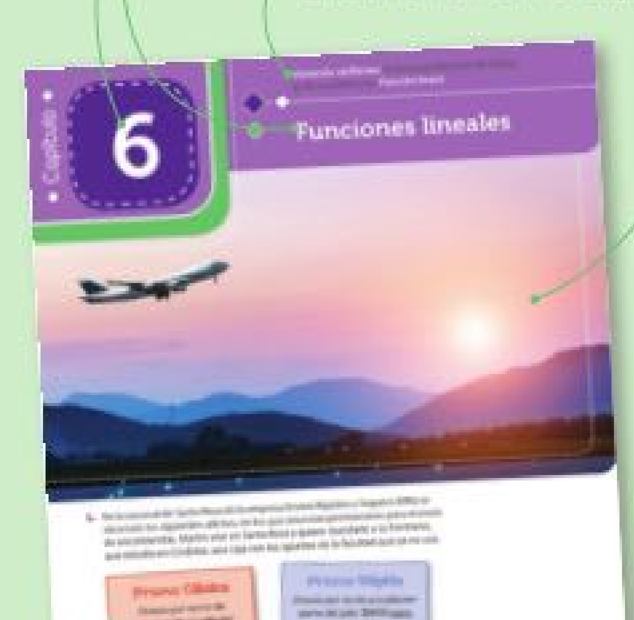

estrada

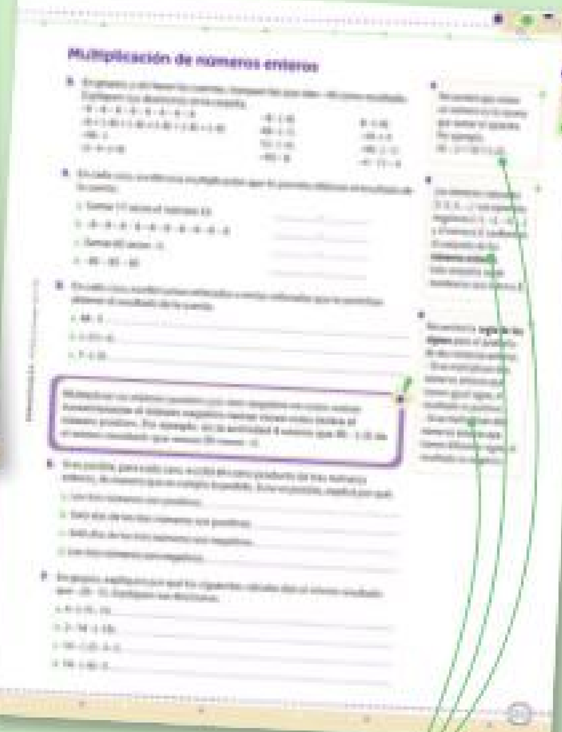

# Cómo es el libro

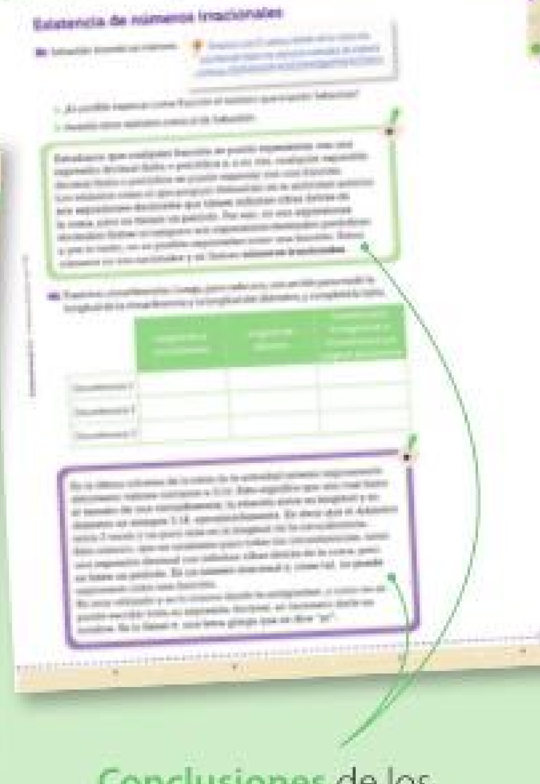
**Número** y **título** del capítulo.

**Contenidos** que se desarrollan en el capítulo.

**Fotografía** que atrapa algunos de los contenidos del capítulo.



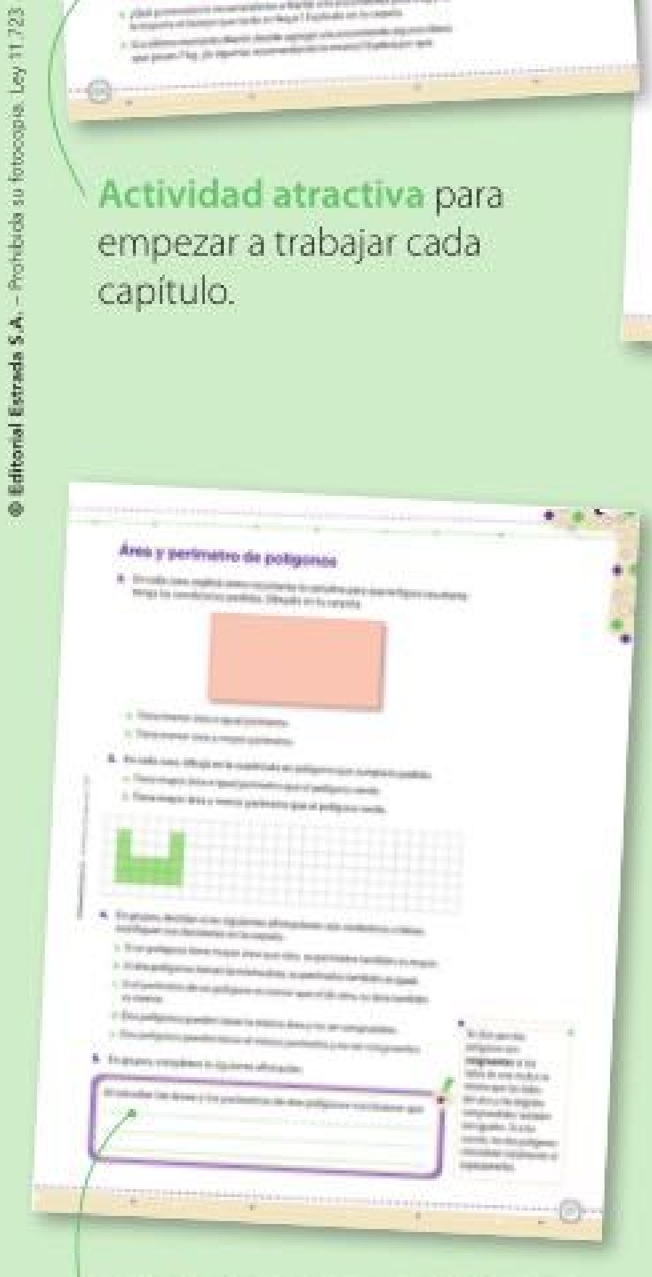



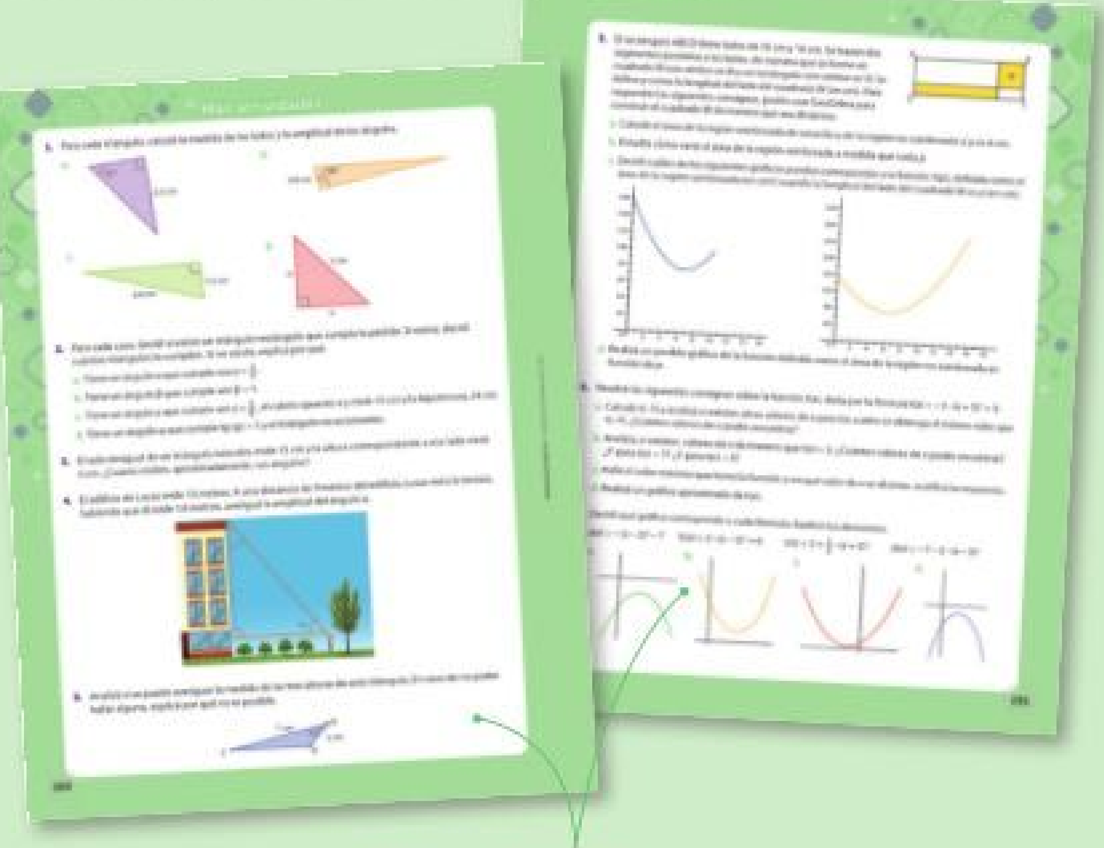




**Actividad atractiva** para empezar a trabajar cada capítulo.

**Conclusiones** de los contenidos trabajados en las actividades y **definiciones**.

**Consejos**, **definiciones**, **aclaraciones** y **recordatorios**.



**Conclusiones para elaborar** entre todos en el aula.

**Más actividades** para seguir resolviendo.




**Combinatoria:** contar permutaciones, variaciones y combinaciones. **Probabilidad:** cálculos de probabilidades.

# Combinatoria y Probabilidad



**1.** En sexto año tienen que elegir a un chico y una chica para que los represente en un evento. Se postularon 7 chicas y 4 chicos.

a. ¿Cuántas parejas se pueden formar?

b. La pareja elegida fue la de Matías y Lucía. Matías quiere llevar ropa linda para la cena del evento y todos los varones del curso le prestan algo para que elija. Reúne 5 pantalones de vestir (negro, gris, azul, marrón y blanco), 6 camisas (blanca, rosa, verde, azul, celeste y negra) y 3 corbatas (lisa, a rayas y con dibujos). ¿De cuántas maneras puede combinar el vestuario?

## Contar opciones

**2.** Lucas y Rocío van a cenar por su aniversario a un restaurante italiano. Respondé las consignas en tu carpeta.

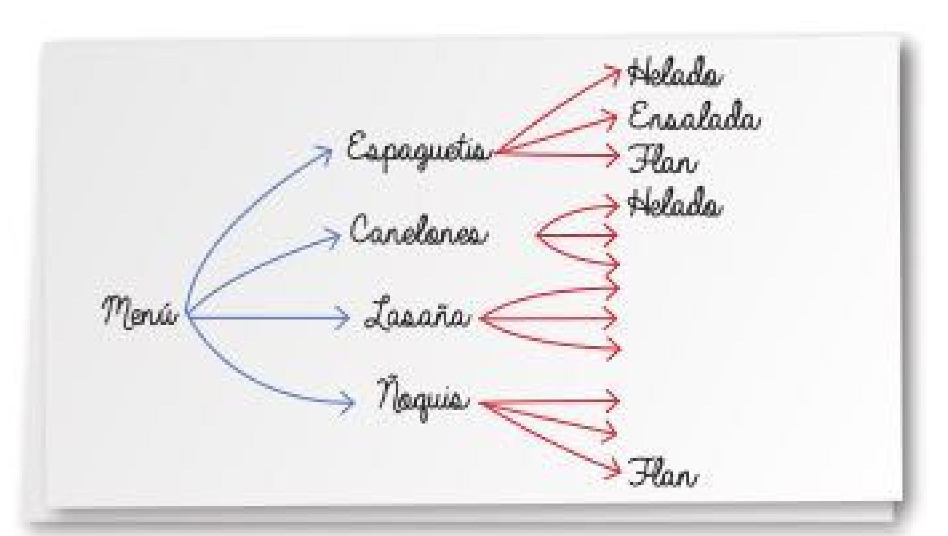
**DESCUENTO ESPECIAL:** 1 plato principal + 1 postre

**PLATOS PRINCIPALES:** espaguetis a la boloñesa, canelones de carne, lasaña a la boloñesa, ñoquis con salsa de tomate.

**POSTRES:** helado, ensalada de frutas, flan con dulce de leche.

a. ¿De cuántas maneras pueden combinar los platos principales y los postres?

b. Para saber cuántas maneras de pedir la cena tienen, Lucas dibuja el siguiente esquema en una servilleta. ¿Sirve para contarlas todas? ¿Por qué?




c. Si la comida tiene, además, 4 opciones de bebidas: agua con o sin gas, jugo de naranja o de pomelo, ¿cuántas maneras de combinar un plato principal, un postre y una bebida hay? Usá el esquema de Lucas para responder.

En las actividades anteriores tenían que contar cuántas parejas diferentes podían formarse, cuántas maneras de vestir o de elegir un menú. Al contar estas opciones, es necesario asegurarse de contarlas todas y de no repetir ninguna.
Una manera de organizar el conteo es haciendo un **diagrama de árbol**, que es un esquema como el de la actividad anterior. Tiene ramas en las que se escriben cada una de las posibilidades para la primera opción, y de cada una de esas ramas salen otras ramas que enumeran las posibilidades para la segunda opción.

**3.** Se trata de escribir números que usen solo los dígitos 1, 2, 4, 5 y 7.

a. Escribí 4 números de 3 cifras que se puedan armar.

b. Calculá cuántos números de 3 cifras distintas se pueden armar.

c. Si se pueden repetir las cifras, ¿cuántos números de 3 cifras se pueden armar?

## Permutaciones

**4.** Se acercan las elecciones en el centro de estudiantes de una escuela. Todos los estudiantes van a votar para elegir a los miembros de la comisión directiva, que está integrada por un presidente, un vicepresidente y un secretario. Lautaro, Micaela y Julieta quieren presentarse juntos como candidatos para conformar la comisión directiva. Cuando confeccionan su lista, no deciden a qué puesto se postulará cada uno.

a. ¿De cuántas maneras pueden armar la lista? ..........

b. Si Micaela es la candidata a presidenta, ¿de cuántas maneras se puede completar la lista?

..........

c. Si Micaela y Julieta se postulan como presidenta y vicepresidenta, respectivamente, ¿de cuántas maneras se puede completar la lista?

..........

Un centro de estudiantes es un organismo de participación, discusión y organización de los estudiantes de un mismo establecimiento educativo para la defensa y protección de sus derechos. Hay un único centro de estudiantes en cada escuela y su comisión directiva es el órgano ejecutivo. Para las elecciones de la Comisión Directiva se deben presentar listas de candidatos, de acuerdo con los requisitos electorales que fije el estatuto interno.

**5.** Sofía no pudo asistir a la última reunión de la comisión de un club, en la cual es tesorera. Agustín, Ariel y Samanta, tres miembros de la comisión, necesitaban disponer de dinero de la caja chica, que estaba cerrada con un candado con un código de 4 dígitos que solo conocía Sofía. Los tres sabían que la clave tenía los números 1, 3, 5 y 8, pero no sabían en qué orden. Agustín propuso probar con distintas claves hasta que alguna abriera el candado, pero aclaró que eran muchas, $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$. Samanta dijo que no eran tantas, que al ser 4 números por 4 lugares, el total era $4 \cdot 4 = 16$. Ariel no estuvo de acuerdo y propuso que eran $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

..........

**6.** Noelia fue a la librería y encontró 6 libros de su autor preferido.

a. Si solo puede comprar uno por mes, ¿de cuántas maneras puede comprar los 6?

..........

b. Si el dinero le alcanza para comprar los 6 libros juntos, ¿cuántas variantes hay para la compra?

..........

Las diferentes maneras de acomodar todos los elementos de un grupo, en distinto orden, se denominan **permutaciones**. Por ejemplo, en la actividad 4 contaron las maneras que tenían 3 estudiantes de ocupar los 3 puestos de la comisión directiva; estas son las permutaciones de 3 elementos. En la segunda consigna de la actividad 6, como no importaba el orden, había una sola manera de comprar.

**7.** Luis y sus 4 hermanos están en la sala de espera del consultorio del dentista. Como ninguno quiere entrar primero, deciden sortear el orden de entrada: cada uno escribe su nombre en un papel; luego, los colocan en una bolsa y los van sacando de a uno. El primer nombre que sacan corresponde al que entra primero, y así sucesivamente. Resolvé las consignas en tu carpeta.

a. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener en el sorteo?

b. ¿En cuántos de esos resultados Luis resulta ser el primero en entrar en el consultorio?

**8.** Blas y tres amigos fueron de vacaciones al Sur. Viajaron en avión hasta Bariloche y, una vez allí, alquilaron un auto para recorrer la zona. Como todos sabían manejar, cada día se sentaron en una posición distinta. Finalmente, pudieron estar en todas las posiciones posibles, sin repetir ninguna.

a. ¿Cuántos días estuvieron de vacaciones en el Sur?

b. El próximo verano planean ir a Brasil, pero al grupo se unirá Lucas. Si quisieran hacer lo mismo que el verano anterior, es decir llegar a una ciudad de Brasil en avión y luego recorrer en auto, sentándose en una ubicación distinta cada día y usando todas las posiciones, ¿cuántos días de vacaciones necesitarían?



**9.** Los integrantes de un equipo de fútbol, formado por 11 titulares y 2 suplentes, quieren sacarse una foto en fila, uno al lado del otro. Como no se ponen de acuerdo con respecto a sus posiciones, deciden sacarse una foto por cada posición posible y luego elegir cuál les gusta más. Si tardan 1 minuto en sacarse cada foto y empiezan a hacerlo 20 minutos antes de que comience el partido, ¿podrán sacarse todas las fotos posibles antes de que este comience?

Para calcular la cantidad de permutaciones de $n$ elementos se multiplican números naturales consecutivos desde $n$ hasta el 1, el número que se obtiene se llama **factorial del número $n$** y se escribe $n!$. Por ejemplo, la primera consigna de la actividad 4 se puede resolver haciendo $3 \cdot 2 \cdot 1$, que es el factorial de 3, y se escribe 3!.

La calculadora científica cuenta con una función para averiguar el factorial de un número. Para calcularlo, hay que apretar la tecla con el símbolo **x!** o el símbolo **n!**.

**10.** Se arman diferentes números con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 8.

a. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar?

..................................................

b. ¿Cuántos de ellos son impares? ..................................................

c. ¿Cuántos son pares? ..................................................

d. ¿Cuántos son menores de 50.000? ..................................................

e. ¿Cuáles son menores de 30.000? ..................................................

f. Si se piden números de 3 cifras distintas, ¿cuántos se pueden armar?

..................................................

## Seleccionar elementos considerando el orden

**11.** Se quiere elegir la junta directiva de un club, que debe estar formada por 3 miembros: presidente, tesorero y secretario. A la elección se presentaron 8 candidatos: Alan, Belén, César, Diego, Emilce, Florencia, Gabriel y Hugo.

a. ¿Cuántas juntas diferentes se pueden elegir entre los ocho candidatos?

..........................................................................................................................

b. Resultaron electos: Alan, presidente; Belén, tesorera y César, secretario. ¿Es posible armar otra junta directiva con las mismas personas?

..........................................................................................................................

**12.** En un torneo de fútbol participan 10 equipos, que competirán entre sí para llevarse los trofeos de los cuatro primeros puestos. Respondé en tu carpeta.

a. ¿De cuántas maneras podrían ganar esos trofeos los 10 equipos?

b. ¿De cuántas maneras podrían ganarlos si hubiera 15 equipos?

**13.** Juan y Paula tienen 6 latas de pintura de distintos colores: amarillo, celeste, verde, rojo, blanco y azul. Con ellas pintarán su habitación usando un color en cada una de las 4 paredes. Quieren calcular de cuántas maneras podrían pintar la habitación. Juan dice que para una pared hay 6 posibles colores; para la segunda, solo 5, para no repetir el color elegido en la primera pared; luego hay 4 para la tercera y 3 para la cuarta. Por eso cuenta $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ maneras de pintar la habitación. Paula está de acuerdo con Juan en la cantidad de colores posibles para cada pared, pero dice que el total es $6 + 5 + 4 + 3 = 18$. ¿Estás de acuerdo con alguno de ellos? Justificá tu respuesta.

**14.** En la primera ronda de una competencia de ajedrez hay 20 participantes, pero solo 16 pasarán a la segunda ronda. El orden en que los participantes resulten clasificados es muy importante, ya que eso determinará quién será su contrincante en la segunda ronda. Resuelvan las consignas en grupos.

a. ¿De cuántas maneras pueden clasificarse 16 participantes para la segunda ronda de entre los 20 iniciales?

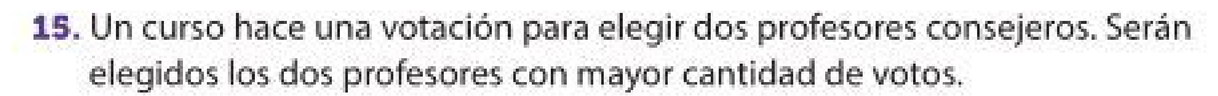
b. Lourdes lo resolvió de esta manera. ¿Les parece correcta su cuenta?

> *Como hay 20 posibilidades para el 1.° puesto, 19 posibilidades para el 2.° puesto, 18 posibilidades para el 3.° puesto, y así sucesivamente, uso la calculadora para hacer la cuenta:*
>
> $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

c. Abril dijo que, para no hacer la cuenta larga que hizo Lourdes, usa la calculadora y divide el factorial de 20 por el factorial de 4. ¿Es correcto? ¿Por qué?

d. Si los participantes fueran 25 y se clasificaran 14 de ellos, ¿cuál sería la cuenta que haría Abril con la calculadora?

**15.** Un curso hace una votación para elegir dos profesores consejeros. Serán elegidos los dos profesores con mayor cantidad de votos.



a. ¿Es importante considerar quién salió primero y quién segundo?

..................................................................................................................



b. ¿Y si quisieran elegir un consejero titular y uno suplente?

..................................................................................................................

En las actividades de la página anterior tenían que contar de cuántas maneras se podían elegir de manera ordenada una cierta cantidad de elementos de un grupo mayor. Por ejemplo, en la primera consigna de la actividad 11 contaron las maneras de elegir 3 personas de un grupo de 8, teniendo en cuenta el orden en que se las selecciona. La cuenta que sirve para calcular la cantidad es $8 \cdot 7 \cdot 6$. Del mismo modo, en la actividad 12 contaron cuántas maneras había de seleccionar 4 equipos de un total de 10, teniendo en cuenta el orden, que se puede calcular haciendo: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.
Si se tiene un grupo de $n$ elementos, las maneras de seleccionar $r$ de esos $n$ elementos (con $r$ menor que $n$), teniendo en cuenta el orden en que se eligen, se llaman las **variaciones de *n* elementos tomados de a *r***.
Para contar cuántas hay, se puede escribir el producto de $n - r$ factores: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$.
También se puede calcular esa cantidad dividiendo el factorial de $n$ por el factorial de $n - r$: $\frac{n!}{(n-r)!}$.
Esta cantidad se suele simbolizar $\mathbf{V(n,r)}$. Por ejemplo, $V(8,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6$, $V(10,4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Para calcular la cantidad de variaciones de $n$ elementos tomados de a $r$, es decir $V(n,r)$, se puede usar la función **nPr** que tienen algunas calculadoras científicas. La P representa la variación.



**16.** En una reunión Alan, Santiago, Jorge y Tomás se saludaron estrechándose las manos. Si cada uno hizo un solo saludo a cada uno de los otros, ¿cuántos apretones de mano se dieron en total?

..................................................................................................................

..................................................................................................................

**17.** En un curso elegirán a 4 alumnos para formar un grupo que hará un trabajo especial. Cintia y sus amigas son 6.

a. ¿Cuántos grupos de 4 pueden armarse con las 6 amigas? ..........................

b. ¿En cuántos de los grupos anteriores Cintia queda excluida? ..........................

**18.** Se quiere dibujar un segmento con extremos en dos de los 8 puntos dados. ¿Cuántos segmentos distintos se pueden dibujar?

..........................................................................

..........................................................................

**19.** En grupos, consideren el conjunto de las actividades 11, 12 y 13, y el de las actividades 16, 17 y 18. Discutan qué tienen en común y en qué se diferencian las actividades de cada grupo. Escriban sus conclusiones en la carpeta.

**20.** En una fábrica hay 18 operarios y se seleccionan 4 para que realicen horas extras. En grupos, decidan cuál de estos procedimientos permite calcular cuántos grupos distintos se pueden seleccionar. Justifiquen su decisión.

Como hay que elegir 4, hacemos $V(18,4) = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$.

*Primero pensamos que importa el orden en que elegimos a los operarios y hacemos V(18,4). Pero después vemos que en todas estas variaciones, a un mismo grupo lo elegimos muchas veces, cambiando el orden de los integrantes. Por ejemplo, si tomamos las iniciales de cuatro operarios, P, A, M y T, el grupo formado por ellos 4 aparece como A P T M, como M A P T, como A P M T, etcétera. Cada grupo de 4 operarios aparece tantas veces como las permutaciones de 4, es decir, 4! veces; y todas esas permutaciones no interesan, porque resulta un mismo grupo, sin importar el orden en el que se lo elija. Entonces, la cantidad de grupos distintos que se pueden elegir son:* $\frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{4!}$

..................................................................................................

..................................................................................................

En las actividades 17 y 20 calcularon cuántos grupos de cierta cantidad de integrantes se podían formar a partir de un grupo mayor. Al resolver estas actividades hay que considerar que el orden al elegir no importa, es decir que un orden distinto no forma un grupo diferente. Los distintos grupos que se forman al tomar $r$ elementos de un grupo de $n$ elementos, sin importar el orden en que son elegidos, se llaman **combinaciones de $n$ elementos tomados de a $r$** y se escribe: $\mathbf{C(n,r)}$.
Para calcular la cantidad de combinaciones, puede considerarse la cantidad de variaciones y luego dividirla por la cantidad de veces que se repite cada grupo, es decir: $C(n,r) = \frac{V(n,r)}{r!}$.
Por ejemplo, en la actividad 17 se analizó que la cantidad de maneras de elegir a los 4 alumnos es: $C(6,4) = \frac{V(6,4)}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Para calcular la cantidad de combinaciones de *n* elementos tomados de a *r*, se puede usar la función **nCr** de la calculadora científica.

**21.** En un torneo de básquet participan 10 equipos. En grupos, calculen en la carpeta cuántos partidos se jugarán si cada equipo juega una vez contra cada uno de los otros.

**22.** En grupos, respondan las siguientes preguntas y justifiquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que si las permutaciones de 25 se multiplican por el número 26 se obtienen las permutaciones de 26?

b. Entre 29 personas, ¿se pueden armar mayor cantidad de grupos de 5 o de 24?

## Probabilidad

**23.** En una bolsa opaca hay bolitas de colores: 18 blancas, 9 rojas y 1 azul, todas del mismo tamaño. Se saca una bolita y se anota su color.

a. ¿Qué es más probable, que la bolita que se saca sea azul, roja o blanca?

..........................................................................................................

b. ¿Es seguro, muy probable, poco probable o imposible que la bolita sea azul?

..........................................................................................................

**24.** Mario y su hermanito Ciro se pelean por el control remoto del televisor. Mario le dice que elija un número de un dado, lo tire y, si sale ese número, se queda con el control, pero si no sale, se lo queda Mario. Resuelvan las consignas en la carpeta.

a. ¿Te parece justo el juego que propone Mario? ¿Por qué?

b. Ciro acepta el juego, elije el número 6 y tira el dado. Cuando cae, para sorpresa de Mario, sale el 6. ¿Por qué pensás que se sorprendió?



Hay experimentos que dan varios resultados posibles, pero no se puede predecir cuál saldrá; depende del azar. Estos experimentos se llaman **aleatorios**. Por ejemplo, en la actividad 23, no podemos saber de qué color será la bolita.
El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y cualquier resultado o conjunto de resultados se denomina **suceso**. Por ejemplo, al tirar un dado, el espacio muestral es el conjunto formado por el 1, el 2, el 3, el 4, el 5 y el 6, y los sucesos pueden ser muchos: que salga un 1, que salga un número par, que salga un número mayor que 5, etcétera.

**25.** En un juego se tira una moneda 2 veces y se registra si sale cara o ceca. Cuando sale cara, se anota una C y cuando sale ceca, una X. Por ejemplo, si la primera vez salió cara y la segunda vez salió ceca, se registra así: CX.

a. ¿Cuál de estos sucesos te parece más probable: que salgan dos caras, que salga dos veces lo mismo o que salga una cara y una ceca? ¿Por qué?

b. Considerá que en lugar de tirar la moneda 2 veces, se la tira 4 veces. Anotá todos los resultados que pueden ocurrir usando la notación de C y X.

c. Ordená estos resultados posibles del más probable al menos probable al tirar la moneda 4 veces.

- Que no salga ninguna cara.
- Que todos los resultados sean iguales.
- Que salga ceca la primera vez.
- Que salga solo cara.
- Que salga exactamente 1 ceca.
- Que salgan exactamente 2 caras.
- Que salga al menos 1 cara y 1 ceca.
- Que salga cara en último lugar.

**26.** Considerá estos experimentos y sucesos. Indicá cuál de ellos tiene más posibilidades de ocurrir, es decir, cuál es el más probable. Explicá tu respuesta en la carpeta.

- Tirar un dado y una moneda, y que salga un número par y cara.
- Sacar una carta al azar de un mazo de 48 y que salga una carta de espadas.
- Sacar una carta al azar de un mazo de 48 cartas y que salga un 3.
- Elegir una persona de un curso de 18 chicas y 6 chicos, y que sea una chica.
- Sacar una ficha de una caja con fichas numeradas del 1 al 10 y que salga un número impar.

Dado un experimento aleatorio y un suceso determinado, la probabilidad de dicho suceso es un número que indica la posibilidad de que el suceso ocurra.
Por ejemplo, si tiramos un dado, observamos que el 4 tiene una chance de salir igual a la del 1 o 2 o 3 o 5 o 6, es decir, tienen la misma probabilidad. Cuando todos los resultados tienen la misma posibilidad de ocurrir, se llama **probabilidad** de un suceso S a la parte que representa ese suceso respecto del total de casos posibles. Es decir:

$$P(S) = \frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos posibles}}$$

En el caso del dado, la probabilidad de que salga el 4 es 1 caso favorable entre 6 casos posibles, es decir, $P(4) = \frac{1}{6}$. Si sacamos una carta al azar de un mazo de 48 cartas, la probabilidad de que salga una carta de espadas es $P(\text{espada}) = \frac{12}{48}$.

**27.** Calculá la probabilidad de cada suceso nombrado en la actividad 26. Justificá tu respuesta en la carpeta.

**28.** Para un sorteo, se escriben en diferentes papelitos los números de tres cifras que pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, repetidos o no, y se los coloca en una bolsa. Luego, se saca un papelito.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea el número 231?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un número par?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que 500?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que termine en 4?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que 700?

Para calcular los casos favorables y los posibles pueden recurrir a los métodos de conteo estudiados en este capítulo.

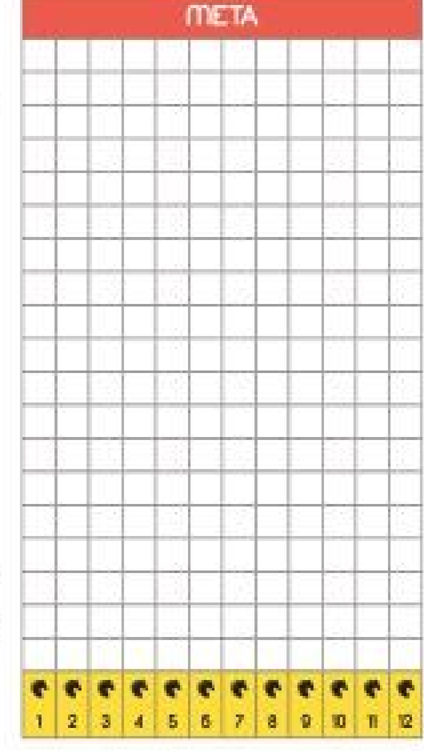
La probabilidad de un suceso aleatorio es un número que varía entre 0 y 1, incluidos los dos. Cuando un suceso es imposible, es decir que nunca ocurre, se le asigna la probabilidad 0. Cuando un suceso es seguro, es decir que siempre pasa, se le asigna la probabilidad 1.

**29.** En un curso de 28 alumnos hacen un sorteo para elegir 4 alumnos que harán un trabajo fuera del aula. Ponen en una bolsa papelitos con los nombres de todos y luego extraen, de a uno, cuatro papeles.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Mica y sus 3 amigas sean seleccionadas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que solo Mica sea seleccionada?

**30.** Esta es una carrera especial: se lanzan dos dados y se suman los números que salen; el caballo cuyo número coincide con esa suma avanza un casillero. Gana la partida el que llega primero a la meta.




a. Antes de empezar a jugar se abren las apuestas. ¿Qué caballo pensás que ganará?

b. Tres amigas juegan a la carrera de caballos. Ana elige el caballo 3, Mica elige el 1 y Agustina el 7. ¿Quién tiene más probabilidades de ganar? ¿Quién hizo la peor elección? ¿Por qué?

**31.** Se tiran 2 dados y se suman los números que salen.

a. ¿Es cierto que la probabilidad de que la suma sea 3 es la misma que la probabilidad de que sea 11? Justificá tu respuesta.

b. Completá la siguiente tabla con la probabilidad de cada suceso.

| Suma | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | | | | | | | | | | | | |

c. Si sumás las probabilidades de todos los sucesos, ¿cuál es el resultado?

**32.** Si en el juego de caballos de la actividad 30, en lugar de tirar dos dados comunes y sumar los resultados, se lanza un dado de 12 caras, ¿qué caballo tiene más probabilidades de ganar?



Hay algunos experimentos, como lanzar dos dados y luego sumar los números que salen, cuyos resultados no tienen la misma probabilidad de ocurrir, es decir que no son equiprobables. Por ejemplo, en la carrera de caballos con dos dados comunes, hay 11 resultados posibles de la suma, desde $2 = 1 + 1$ hasta $12 = 6 + 6$. Como ya calcularon en la actividad 31, que la suma sea 4 tiene una probabilidad $\frac{3}{36}$ y que sea 3 tiene una probabilidad $\frac{2}{36}$. Ninguna de estas probabilidades se calcula con el cociente entre casos favorables y casos posibles, pues todos estos cocientes darían $\frac{1}{11}$.

## Más actividades

1. Mía está invitada a una fiesta y para vestirse tiene que elegir entre 3 remeras y 4 pantalones. ¿De cuántas maneras puede combinar su ropa?

2. Se lanzan al aire 3 monedas. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

3. Una cadena de comida rápida ofrece a sus comensales que armen su propio sándwich. Se puede elegir entre 4 variedades de panes: blanco, integral, de avena o con orégano y parmesano. Los rellenos posibles son 3: jamón y queso, pollo o carne. El aderezo puede ser kétchup, mayonesa o mostaza. El sándwich se puede pedir frío o caliente. Matías decide ir todos los días y probar uno diferente cada vez. ¿Cuántos días pasarán hasta que pruebe todas las combinaciones posibles?

4. Ariel tiene 4 hermanos, Catriel, Uriel, Gabriel y Mariel. Si la mamá de Ariel quiere llamar a cenar a sus 5 hijos nombrándolos uno por uno, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

5. Cambiando el orden de las letras de la palabra AMOR se pueden formar distintas combinaciones usando esas letras en diferente orden. ¿Cuántas combinaciones hay?

6. a. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con los números 9, 8, 7 y 6?
   b. ¿Y si se pueden repetir las cifras?

7. a. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con los números del 1 al 9?
   b. ¿Y si se pueden repetir las cifras?

8. Para formar la asamblea del centro de estudiantes, cada curso de la escuela debe elegir un delegado titular, un primer suplente y un segundo suplente. En un curso hay 7 chicos que quieren ser delegados. ¿De cuántas maneras se puede elegir a los 3 delegados?

9. Karina le dio a Lucas su número de celular anotado en una servilleta y le dijo que todas las cifras eran distintas. Más tarde, él se dio cuenta de que la servilleta estaba mojada y se habían borrado los 4 números finales. Entonces escribió todos los números de celular que podían ser y fue llamando a cada uno hasta contactarse con ella. ¿Cuántos números escribió Lucas?

10. Desde 1995 hasta 2016 las patentes argentinas estaban formadas por 6 caracteres: 3 números y 3 letras. Pero como el número de autos patentados era cada vez mayor y ya se estaban agotando todas las combinaciones de patentes posibles, a partir del 1 de abril de 2016 entró en vigencia la placa patente Mercosur para los automotores 0 km. Las nuevas patentes tienen 7 caracteres, compuestos por 4 letras y 3 números; es decir que se agregó una letra.




    a. ¿Cuántos autos se podían patentar con el antiguo régimen de patentamiento?
    b. ¿Hay mucha diferencia entre la cantidad de patentes que se podían armar antes y la cantidad de patentes que se pueden armar ahora?

11. Hay 7 libros y se deben elegir 3 para hacer un regalo. ¿De cuántas maneras se pueden elegir?

12. 15 personas asisten a una reunión y se saludan todas con un beso. ¿Cuántos besos se dieron?

**13.** En un curso de 10 varones y 18 mujeres se debe formar un comité de 6 personas.

a. ¿De cuántas maneras puede formarse el comité?

b. ¿Y si la mitad de los chicos y chicas no quieren participar del comité?

c. ¿Y si el comité debe estar formado por 3 varones y 3 mujeres?

**14.** En una urna con 100 fichas del mismo tamaño hay 80 azules, 10 rojas, 2 verdes y el resto son marrones. Se saca una ficha de la urna, sin mirar.

a. ¿Qué color de ficha tiene más probabilidad de salir?

b. ¿Dirías que es seguro, muy probable, poco probable o imposible que la ficha elegida sea verde? ¿Por qué?

**15.** Se extrae una carta al azar de un mazo de cartas españolas con 10 cartas de cada palo.

a. ¿Es verdad que la probabilidad de que la carta sea de oro o de copa o de espada o de basto es la misma? ¿Por qué?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea el 1 de oro?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea 5?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea par?

**16.** En un juego hay que adivinar la clave de 4 dígitos distintos de una caja fuerte. Cada participante tiene 3 chances y quien lo adivine se lleva un millón de pesos. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

**17.** Se realizarán las elecciones del centro de estudiantes para la conformación de la nueva comisión directiva (presidente, vicepresidente y secretario). Tres amigos, Lucas, Julián y Sebastián se postulan junto a otras 7 personas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Lucas sea electo presidente, Julián vicepresidente y Sebastián secretario?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres sean electos?

**18.** En una bolsa hay bolitas del mismo tamaño, 4 son blancas, 10 son negras y 6 son rojas. Se extraen al azar y simultáneamente 4 bolitas. Calculá la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Las 4 bolitas son blancas.

b. Las 4 bolitas son negras.

c. 2 bolitas son negras y 2 son rojas.

d. Las 4 bolitas son del mismo color.

e. Las 4 bolitas son de diferentes colores.

**19.** Sofía y Vicky están jugando con un dado. Cada una elige un número del 1 al 6, después tiran el dado y gana la que eligió el número que sale.

a. Sofía eligió el 1 y Vicky el 6. ¿Cuál es la probabilidad de ganar que tiene cada una?

b. Si jugaran con un dado que tuviera 3 unos, 2 cuatros y 1 seis, ¿la probabilidad sería la misma?

Capítulo 2

**Números enteros:** multiplicaciones y divisiones; las letras como variables; ecuaciones.

# Números enteros y divisibilidad

**1.** Felipe dice que si suma de 8 en 8, empezando desde el 0, llegará a nombrar el número 824.

a. ¿Es cierto lo que dice Felipe? ..........

b. Proponé tres números que sean mayores que 2.000 y que podría nombrar Felipe contando de 15 en 15, empezando por el 0. Explicá cómo los elegiste.

..........

**2.** Máximo dice que si resta de 7 en 7, empezando desde el 0, llegará a nombrar el número −715. Felipe dice que él llega al −715 restando de 7 en 7, pero empezando desde −1. Resolvé las consignas en tu carpeta.

a. Analizá si alguno de los chicos tiene razón. Explicá tu análisis.

b. Proponé tres números menores que −140 que podría nombrar Máximo. Explicá cómo los elegiste.

c. ¿Puede ser que Felipe, si sigue restando, llegue al número −2.120? Explicá tu respuesta.

# Multiplicación de números enteros

**3.** En grupos, y sin hacer las cuentas, marquen las que dan –48 como resultado. Expliquen sus decisiones en la carpeta.

| | | |
|---|---|---|
| –6 – 6 – 6 – 6 – 6 – 6 – 6 – 6 | –8 · (–6) | 8 · (–6) |
| –8 + (–8) + (–8) + (–8) + (–8) + (–8) | 48 · (–1) | –44 + 4 |
| –48 · 1 | 12 · (–4) | –48 · (–1) |
| –3 · 4 · (–4) | –40 – 8 | –4 · 11 – 4 |

**4.** En cada caso, escribí una multiplicación que te permita obtener el resultado de la cuenta.

a. Sumar 17 veces el número 32. ............ · ............

b. –8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 ............ · ............

c. Sumar 85 veces –3. ............ · ............

d. –85 – 85 – 85 ............ · ............

**5.** En cada caso, escribí sumas reiteradas o restas reiteradas que te permitan obtener el resultado de la cuenta.

a. 48 · 5 ............

b. (–31) · 6 ............

c. 7 · (–5) ............

Multiplicar un número positivo por otro negativo es como sumar sucesivamente el número negativo tantas veces como indica el número positivo. Por ejemplo, en la actividad 4 usaron que 85 · (–3) da el mismo resultado que sumar 85 veces –3.

**6.** Si es posible, para cada caso, escribí 84 como producto de tres números enteros, de manera que se cumpla lo pedido. Si no es posible, explicá por qué.

a. Los tres números son positivos. ............

b. Solo dos de los tres números son positivos. ............

c. Solo dos de los tres números son negativos. ............

d. Los tres números son negativos. ............

**7.** En grupos, expliquen por qué los siguientes cálculos dan el mismo resultado que –28 · 15. Expliquen sus decisiones.

a. 4 · (–7) · 15 ............

b. 2 · 14 · (–15) ............

c. 14 · (–2) · 3 · 5 ............

d. 14 · (–6) · 5 ............

Recuerden que restar un número es lo mismo que sumar el opuesto. Por ejemplo, 18 – 2 = 18 + (–2).

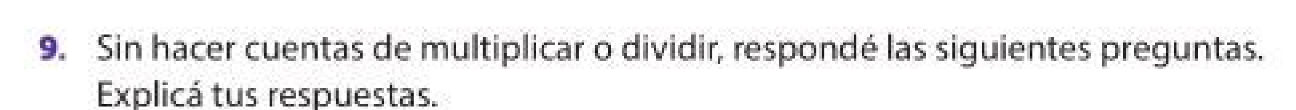
Los números naturales (1, 2, 3, ...), sus opuestos negativos (–1, –2, –3, ...) y el número 0 conforman el conjunto de los **números enteros**. Este conjunto suele nombrarse con la letra **Z**.

Recuerden la **regla de los signos** para el producto de dos números enteros.
- Si se multiplican dos números enteros que tienen igual signo, el resultado es positivo.
- Si se multiplican dos números enteros que tienen diferente signo, el resultado es negativo.

## Múltiplos y divisores

**8.** En esta recta numérica están ubicados el 0 y el producto 12 · 6. En parejas ubiquen, de la manera más precisa posible, los productos: 6 · 6; –3 · 6; –9 · 6; 13 · 6 y –8 · 6. Expliquen en la carpeta cómo ubicaron los números.

Los números opuestos se encuentran a la misma distancia del número 0.




**9.** Sin hacer cuentas de multiplicar o dividir, respondé las siguientes preguntas. Explicá tus respuestas.

a. ¿Cuántas unidades hay entre 39 · 6 y 40 · 6? ¿Y entre –9 · 6 y –8 · 6?

b. Si 17 · 6 = 102, ¿es cierto que 108 = 18 · 6?

c. Si –33 · 6 = –198, ¿es cierto que –192 = –34 · 6?

d. Si 2.430 : 6 = 405, ¿es cierto que –2.430 = –405 · 6?

e. Si –1.944 : 6 = –324, ¿es cierto que –2.000 está entre –324 · 6 y –323 · 6?

Un número entero es **múltiplo** de otro cuando es el resultado de multiplicar este último número por otro número entero. Por ejemplo, de la tercera consigna de la actividad 9 se puede decir que –198 es múltiplo de 6 y de –33, porque (–33) · 6 = –198. El número –198 también es múltiplo de –6 y de 33, porque –6 · 33 = –198.
Si un número entero es múltiplo de otro, el segundo es **divisor** del primero y el primero es **divisible** por el segundo. Por ejemplo, –6 es divisor de –198 y –198 es divisible por –6.



**10.** En grupos, completen cada cuenta para llegar al múltiplo de 7 más cercano. Expliquen sus respuestas.

a. 71 + ..................

b. –71 + ..................

c. –1.435 + ..................

d. 1.435 + ..................

e. 214 + ..................

f. –214 + ..................



**11.** En cada caso, completá con el menor número positivo que hay que sumar para llegar al múltiplo de 9 más cercano. Explicá tus respuestas.

a. 182 + ..................

b. –182 + ..................

c. –2.735 + ..................

d. 2.735 + ..................

**12.** En cada caso, proponé, si es posible, 5 números que cumplan lo pedido.

a. Múltiplos de 7 que estén entre 2.110 y 2.170.

b. Múltiplos de 11 que estén entre –2.270 y –2.210.

c. Números que excedan en 1 a un múltiplo de 7 y que estén entre –260 y –240.

**13.** Sin hacer las cuentas y usando que $-33 \cdot (-50) = 1.650$, decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá tus decisiones.

a. 1.650 es divisible por –50.
b. –33 es múltiplo de 1.650.
c. 1.650 es múltiplo de –50.
d. –10 es divisor de 1.650.
e. –1.650 es múltiplo de –33.
f. 1.650 es divisible por 11.

**14.** Usá la información que ofrece la cuenta para explicar por qué las afirmaciones son verdaderas.




a. 1.529 es múltiplo de 11.
b. 1.540 es múltiplo de 11.
c. 139 es divisor de 1.529.
d. 1.518 es divisible por 11.
e. 1.529 es múltiplo de –11.
f. –139 es divisor de 1.529.

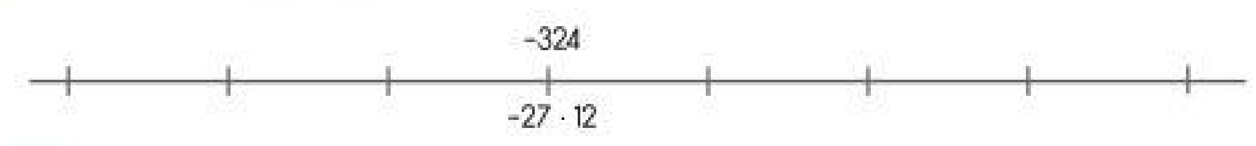
**15.** Escribí tres afirmaciones verdaderas usando la cuenta de la actividad anterior.

..................................................

..................................................

..................................................

**16.** En esta recta numérica se ubicó el número –324.




a. En grupos, elijan una graduación para la recta que les permita ubicar: $-28 \cdot 12$; $-27 \cdot 12 + 6$; $-27 \cdot 12 - 6$; $-26 \cdot 12$. Expliquen cómo lo hicieron.

..................................................

b. Para cada caso, completen las afirmaciones con dos múltiplos consecutivos de 12 entre los que podrían ubicar al número dado.

- El número –325 se encuentra entre .................... y .....................
- El número 325 se encuentra entre .................... y .....................
- El número $-30 \cdot 12 + 3$ se encuentra entre .................... y .....................
- El número $30 \cdot 12 + 3$ se encuentra entre .................... y .....................

**17.** En grupos, propongan tres números menores que –324 que cumplan lo pedido.

a. Son múltiplos de 12.
b. Hay que sumarles 2 para obtener un múltiplo de 12.
c. Hay que restarles 6 para obtener un múltiplo de 12.

Para resolver las actividades 17 y 18 pueden apoyarse en los análisis realizados en la actividad 16.

**18.** En grupos, propongan tres números mayores que 324 que cumplan lo pedido.

a. Hay que sumarles 2 para obtener un múltiplo de 12.
b. Hay que restarles 6 para obtener un múltiplo de 12.

## Expresiones equivalentes y divisibilidad

**19.** Decidí, sin hacer los cálculos, si cada cuenta tiene el mismo resultado que $60 \cdot 12$.

a. $6 \cdot (-10) \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-3)$

b. $-15 \cdot 4 \cdot 4 \cdot (-3)$

c. $-16 \cdot (-15) \cdot 3$

d. $-36 \cdot (-20)$

**20.** Explicá, sin hacer los cálculos, por qué cada par de cuentas tiene el mismo resultado.

a. $-17 \cdot 3 + 5$ $\quad -17 - 17 - 17 + 5$

b. $-17 \cdot 3 - 18$ $\quad -17 \cdot 4 - 1$

c. $-17 \cdot 3 + 18$ $\quad -17 - 17 + 1$

d. $-17 \cdot 3 - 17 \cdot 487$ $\quad -17 \cdot 490$

En las actividades 19 y 20 estudiaron diferentes maneras de expresar un mismo número. Cuando esto ocurre, se dice que las expresiones son **equivalentes**. Cada expresión permite leer información diferente. Por ejemplo, si $60 \cdot 12$ se escribe como $-15 \cdot 4 \cdot 4 \cdot (-3)$, se puede leer más fácil que el número es divisible por $-15$, por 4, por 3 y por sus opuestos. Pero también se puede escribir como $-16 \cdot (-15) \cdot 3$, que permite leer que es múltiplo de 16 y de $-16$. De las transformaciones que realizaron en la actividad 20 se puede leer que, por ejemplo, 490 es divisor de $-17 \cdot 3 - 17 \cdot 487$.

**21.** En grupos, y en cada caso, escriban dos expresiones equivalentes. Justifiquen sus respuestas en la carpeta.

a. $-24 \cdot 35 =$ .................... = ....................

b. $13 \cdot 5 + 5 =$ .................... = ....................

c. $-13 \cdot 5 + 5 =$ .................... = ....................

d. $29 \cdot (-11) + 29 \cdot (-2) =$ .................... = ....................

e. $373 \cdot (-18) + 373 \cdot 2 =$ .................... = ....................

**22.** A partir de las expresiones equivalentes que escribieron en la actividad anterior, escribí cuatro divisores de cada una de las siguientes expresiones. Explicá tu respuesta en la carpeta.

a. Divisores de $-24 \cdot 35$. ....................

b. Divisores de $13 \cdot 5 + 5$. ....................

c. Divisores de $-13 \cdot 5 + 5$. ....................

d. Divisores de $29 \cdot (-11) + 29 \cdot (-2)$. ....................

e. Divisores de $373 \cdot (-18) + 373 \cdot 2$. ....................




**23.** Explicá por qué son verdaderas estas afirmaciones acerca de $3 \cdot (-16) \cdot (-5) \cdot 14$.

a. Es múltiplo de −7. ..........

b. Es múltiplo de 20. ..........

c. Es múltiplo de 30. ..........

**24.** En grupos, escriban en la carpeta 5 expresiones equivalentes a $3 \cdot (-16) \cdot (-5) \cdot 14$ que les ayuden a encontrar divisores de dos cifras de esa expresión.

**25.** Estudiá cuáles de las siguientes expresiones equivalentes pueden ayudarte a decidir si el número −1.948 es divisible por 8.

a. −1.956 = −1.000 − 900 − 50 − 6 ..........

b. −1.956 = −1.000 − 900 − 56 ..........

c. −1.956 = −1.600 − 320 − 32 − 4 ..........

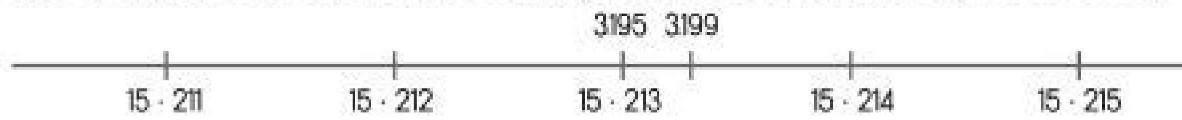
**26.** Para cada número, escribí, en la carpeta, una expresión equivalente que te ayude a analizar si el número es divisible por 6.

a. 638 b. −252 c. −3.712 d. −12.568

En las actividades de este capítulo usaron diferentes estrategias para estudiar la divisibilidad de un número por otro. Por ejemplo, al buscar expresiones equivalentes algunas estrategias fueron:
- descomponer el número en multiplicaciones,
- descomponer el número en sumas o restas fáciles de analizar.



**27.** En esta recta numérica se ubicaron múltiplos de 15 y, de manera aproximada, 3.199. En grupos, resuelvan las consignas usando la información de la recta.




a. Expliquen, sin hacer multiplicaciones, por qué las siguientes expresiones son equivalentes al número 3.199.

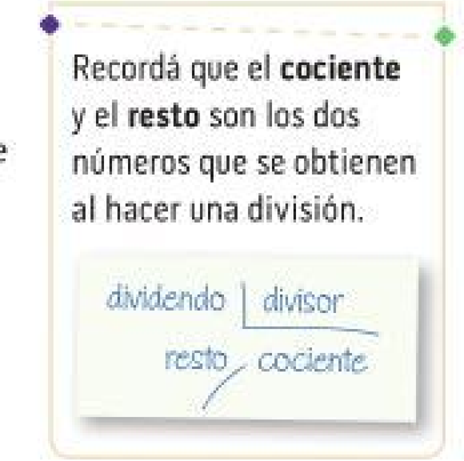
$15 \cdot 213 + 4$ $15 \cdot 214 - 11$ $15 \cdot 212 + 19$

b. Escriban otras tres expresiones que estén formadas por un múltiplo de 15 al que se le suma o resta un número y que resulte equivalente a 3.199.

c. Escriban tres expresiones que estén formadas por un múltiplo de 15 al que se le suma o resta un número y que resulte equivalente a −3.199.

d. Si les piden determinar el cociente y el resto de la división de 3.199 por 15, ¿cuál de las expresiones de las dos primeras consignas usarían?

e. Si les piden determinar el cociente y el resto de la división de −3.199 por 15, ¿cuál de las expresiones de la tercera consigna usarían?



## Cociente y resto en la división de enteros

**28.** En grupos, sin hacer cuentas de dividir, y a partir de la información que ofrece la recta numérica de la actividad 27, calculen el resto y el cociente de las siguientes divisiones. Expliquen sus respuestas.

a. 3195 | 15

b. 


c. 

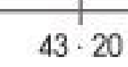

d. 


**29.** En grupos, ubiquen en cada recta los números pedidos, de la manera más precisa posible y usando la información que da esta cuenta. Expliquen cómo decidieron dónde ubicarlos.

865 | 20
5 / 43

a. 860; 865; 888 y 851.








b. –860; –865; –888 y –851.



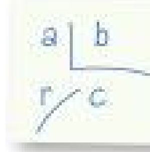





**30.** En grupos, usen lo que analizaron en la actividad anterior para decidir si estos cálculos son correctos. Expliquen sus decisiones.

a. $865 = 20 \cdot 43 + 5$
b. $860 = 20 \cdot 43$
c. $865 = 20 \cdot 44 - 10$
d. $-860 = 20 \cdot (-43)$
e. $-865 = 20 \cdot (-43) + 5$
f. $-865 = 20 \cdot (-43) - 5$
g. $-865 = 20 \cdot (-44) - 15$
h. $-865 = 20 \cdot (-44) + 15$
i. $865 = 20 \cdot 44 - 15$

Dados dos números naturales $a$ y $b$, siempre existen dos números $c$ y $r$, el cociente y el resto de la división, tales que $a = b \cdot c + r$. Pero, ¿qué pasa si $a$ es negativo y $b$ es positivo?




En las actividades anteriores vieron que hay varias maneras de escribir –865 como múltiplo de 20 más o menos un número:

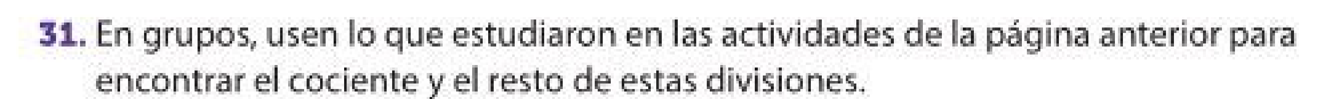
$-865 = 20 \cdot (-43) - 5 \quad -865 = 20 \cdot (-44) + 15 \quad -865 = 20 \cdot (-45) + 35$

La expresión que sirve para encontrar el cociente y el resto de –865 dividido 20 es aquella en la que el resto sea mayor o igual que 0 y menor que el divisor, 20.

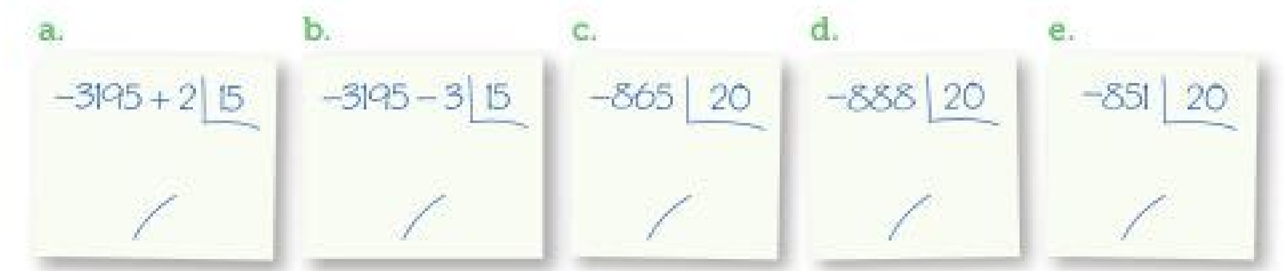



Entonces, dados dos números $a$ y $b$, con $a$ entero y $b$ natural, siempre existen dos números $c$ y $r$, tales que $a = b \cdot c + r$ y, para que sean únicos, $r$ tiene que ser mayor o igual que 0 y menor que $b$.



**31.** En grupos, usen lo que estudiaron en las actividades de la página anterior para encontrar el cociente y el resto de estas divisiones.




**32.** En cada caso, sin hacer cuentas de multiplicar ni de dividir, indicá la opción correcta. Explica tu decisión en la carpeta.

a. El resultado de 12 · 1.345 + 8 es múltiplo de: 12 4 5 8

b. El resto de dividir 12 · 1.345 + 8 por 5 es: 8 2 0 3

c. El resto de dividir 12 · 1.345 + 8 por 3 es: 8 2 0 3

**33.** En grupos y sin hacer cuentas de multiplicar ni de dividir, indiquen, en cada caso, las opciones correctas. Expliquen sus decisiones.

a. 21 · 20 – 15 es equivalente a: 20 · 20 + 20 – 15 22 · 20 – 35 7 · 3 · 20 – 15

...............................................................................................

b. El resultado de 21 · 20 – 15 es múltiplo de: 7 3 4 15

...............................................................................................

c. El resto de dividir 21 · 20 – 15 por 20 es: 15 –15 5 –5

...............................................................................................

d. El resto de dividir 21 · 20 – 15 por 4 es: 1 –1 3 –3

...............................................................................................

Para analizar las dos últimas consigas de las actividades 33 y 34 puede resultarles útil trazar una recta numérica y pensar en los múltiplos de 4 o de 20.

**34.** En grupos y sin hacer cuentas de multiplicar ni de dividir, indiquen, en cada caso, las opciones correctas. Expliquen sus decisiones en la carpeta.

a. –21 · 20 – 15 es equivalente a: –20 · 20 + 20 – 15 –22 · 20 + 5 –23 · 20 + 25

b. El resultado de –21 · 20 – 15 es múltiplo de: 7 3 4 15

c. El resto de dividir –21 · 20 – 15 por 20 es: 15 –15 5 –5

d. El cociente de dividir –21 · 20 – 15 por 20 es: –20 –21 –22 –23

**35.** Para cada cuenta indicá si es posible saber, sin hacer la multiplicación, si su resultado es múltiplo de 9. Explicá tu respuesta.

a. –16 · 37 + 5 · 37 + 2 · 37 b. 11 · 99 – 1 · 99 c. –21 · 33 – 18

**36.** Para cada caso, escribí una expresión equivalente a –15 · 24 – 18 que te ayude a encontrar el resto de dividir –15 · 24 – 18 por cada uno de los siguientes números. En cada caso, indicá cuál es el resto.

a. 5 b. 10 c. 18

## Expresiones algebraicas y divisibilidad

**37.** Si es posible, completá cada cuenta con un número entero para que la afirmación sea verdadera. En cada caso, indicá si hay una única posibilidad. Si hay más de una, explicá cuáles son todos los números enteros que podrías escribir.

a. 23 · (–37) + .............. da como resultado un número par.

b. –8 · .............. da como resultado un número impar.

c. 7 · .............. – 10 da como resultado un múltiplo de 5.

d. 7 · .............. – 10 da como resultado un número terminado en 5.

e. .............. · (–3) + 11 da como resultado un múltiplo de 3.

**38.** a. ¿Es cierto que si en la cuenta 8 · (–25) + *a* se reemplaza la letra *a* por el número –18, el resultado es múltiplo de 8?

..............................................................................................................

b. ¿Con qué valores podrías reemplazar la letra *a* para que el resultado de 8 · (–25) + *a* sea múltiplo de 8?

..............................................................................................................

A la letra que aparece en expresiones con números y operaciones se la conoce con el nombre de **variable**, porque no tiene un valor fijo. Por ejemplo, en (*m* – 3) · 7, la variable *m* se puede reemplazar por cualquier valor, pero el resultado de la cuenta será impar solo si se la reemplaza por números pares.

**39.** En cada caso, y si es posible, encontrá cuatro valores positivos y cuatro negativos con los que podrías reemplazar *m* para que se cumpla lo pedido.

a. (*m* – 3) · 7 es un número par. ..............................................

b. (*m* – 3) · 7 es múltiplo de 7. ..............................................

c. (*m* – 3) · 7 es un número que termina en 0. ..............................

d. (*m* – 3) · 7 es múltiplo de 3. ..............................................

**40.** En grupos, para cada ítem de la actividad anterior, estudien cuáles son todos los valores con que podrían reemplazar la variable *m* para que se cumpla lo pedido.

**41.** En grupos, expliquen en la carpeta por qué estas afirmaciones son verdaderas.

a. La expresión 6 · *a* – 27 da múltiplos de 3 para cualquier valor de *a*.

b. Para ningún valor de *a*, la expresión 6 · *a* – 27 da múltiplos de 6.

c. La expresión 6 · *a* – 27 da múltiplos de 9 para algunos valores de *a* y para otros no.

**42.** Para cada afirmación, proponé, si es posible, tres valores de *b* para los que la afirmación sea verdadera y tres valores de *b* para los que la afirmación sea falsa. Si no es posible, explicá por qué.

a. El resultado de 21 · *b* + 15 es múltiplo de 6.

b. El resto de dividir 21 · *b* + 15 por 3 es 0.

c. El resto de dividir 21 · *b* + 15 por 7 es 0.




Si en una afirmación intervienen expresiones con variables, pueden darse las siguientes situaciones excluyentes.

- Que la afirmación sea **verdadera para cualquier valor** de la variable.
- Que la afirmación sea **verdadera para algunos valores** de la variable y para otros, no.
- Que la afirmación sea **falsa para todos los valores** de la variable, es decir que no sea verdadera para ningún valor.

Por ejemplo:

- "$(m - 3) \cdot 7$ da múltiplos de 7" es verdadera para cualquier valor de $m$.
- "$(m - 3) \cdot 7$ da números pares" es verdadera para algunos valores de $m$ y para otros, no. Para $m = 1$ es verdadera y para $m = -2$ es falsa.
- "$(m - 3) \cdot 7 + 1$ da múltiplos de 7" es falsa para todos los valores de $m$.

**43.** En grupos, expliquen por qué cada afirmación es verdadera para cualquier valor de la variable $t$.

a. El resultado de $(2 \cdot t + 1) \cdot 3$ es un número impar.

b. El resultado de $4 \cdot t + 5 + 6 \cdot t$ termina en 5.

c. El resultado de $13 \cdot t - 3 \cdot t$ es múltiplo de 10.

d. El resultado de $10 \cdot t + 2 \cdot (t + 3)$ es múltiplo de 6.



Para estudiar para qué valores de la variable una expresión es múltiplo de algún número entero se pueden usar las propiedades de las operaciones, transformando la expresión en otra en la que se pueda leer nueva información. Por ejemplo, en la actividad anterior, para explicar por qué $10 \cdot t + 2 \cdot (t + 3)$ es múltiplo de 6 para cualquier valor de la variable $t$, se puede transformar la expresión así:
$10 \cdot t + 2 \cdot (t + 3) = 10 \cdot t + t + 3 + t + 3 = 10 \cdot t + 2 \cdot t + 6 = 12 \cdot t + 6$.
Usando las propiedades de las operaciones entre números enteros, se logró transformar la expresión $10 \cdot t + 2 \cdot (t + 3)$ en $12 \cdot t + 6$, de manera que ambas tienen el mismo resultado para todos los valores de la variable $t$. Por eso se dice que son expresiones equivalentes.
La última expresión obtenida, $12 \cdot t + 6$, permite leer que el resultado será múltiplo de 6 para todo valor de la variable $t$.

Dos **expresiones con variables** son **equivalentes** cuando dan el mismo resultado para cualquier valor que tome la variable.

Para justificar que una afirmación es falsa, basta con dar un ejemplo en el que esta no se cumpla. Se lo llama **contraejemplo**. Por ejemplo, en la segunda afirmación de la actividad 44, se puede usar $j = 5$ como contraejemplo para mostrar que la afirmación es falsa.

**44.** Estudiá si estas afirmaciones son verdaderas. Explicá tus decisiones.

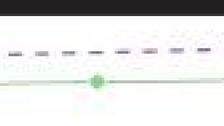
a. La expresión $8 \cdot (j - 3)$ da múltiplos de 4 para todos los valores enteros de $j$.

b. La expresión $8 \cdot (j - 3)$ da múltiplos de 24 para todos los valores enteros de $j$.

c. La expresión $8 \cdot (j - 3)$ da números terminados en 0 solo para valores enteros de $j$ que terminan en 3.

d. La expresión $8 \cdot (j - 3)$ da números impares para algunos valores enteros de $j$.







**45.** En grupos, decidan si los siguientes pares de expresiones son equivalentes. Justifiquen sus decisiones en la carpeta.

a. $3 \cdot (n - 7)$ — $3\,n - 7$

b. $4 + 2 \cdot (m + 3)$ — $10 + 2\,m$

c. $(2\,r - 3) \cdot 12$ — $24\,r - 36$

d. $-3\,t + 3$ — $-3 \cdot (t - 1)$

e. $x - (3 - 2\,x)$ — $x - 3 - 2\,x$

f. $m - (m + 2)$ — $-2$

g. $9\,(h + 5) - (h + 5)$ — $8 \cdot (h + 5)$

h. $2\,n + (3\,n + 1) \cdot (-2)$ — $2 \cdot (-2\,n + 3) - 8$

Recuerden que para escribir el producto de un número por una variable, se puede omitir el punto que simboliza la operación de multiplicación. Por ejemplo, $3 \cdot n$ se puede escribir $3\,n$.

Recuerden que restar un número es lo mismo que sumar su opuesto: $a - b = a + (-b)$.

**46.** En cada caso, escribí dos expresiones equivalentes a la expresión dada.

a. $(r + 3) \cdot 32$

b. $3 \cdot (5\,n - 5) - 15\,n$

c. $(2\,f + 1) \cdot (-3) + 3 + 2\,f$

d. $x + 2 + x + 2 + x + 2$

e. $4 \cdot (2\,m - 3) - (3 + 2\,m) \cdot (-4)$

f. $5\,p - (2 - p) \cdot 5 + (-3) \cdot (2\,p - 4)$

**47.** En grupos, decidan si las afirmaciones son verdaderas. Expliquen sus decisiones.

a. Si a cualquier múltiplo de 7 se le suma un múltiplo de 3, el resultado es múltiplo de 10.

b. Si a cualquier múltiplo de 6 se le suma un múltiplo de 3, el resultado es múltiplo de 6.

c. Si se suman tres múltiplos de 5, el resultado siempre termina en 5.

d. Si se suman tres múltiplos de 5 que sean consecutivos, el resultado siempre termina en 5.

e. Si se suman cuatro múltiplos de 5 que sean consecutivos, el resultado siempre termina en 0.

**48.** Explicá por qué las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a. La suma de tres números consecutivos es múltiplo de 3.

b. La suma de siete números consecutivos es múltiplo de 7.

**49.** Decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá tus decisiones.

a. Si la variable $m$ toma el valor $-10$, entonces $8 + m = -18$.

b. Si la variable $m$ toma el valor $-3$, entonces $8 + 3 \cdot m = -4 - m$.

c. La expresión $3 + 5 \cdot m$ es igual a la expresión $8\,m$ para cualquier valor de $m$.

d. La igualdad $3 \cdot m + 5 \cdot m = 8\,m$ es verdadera para cualquier valor de $m$.

e. La igualdad $10 \cdot m + 3 = 8 \cdot m + 2 \cdot m$ es verdadera para algunos valores de $m$.

# Ecuaciones

Una igualdad en la que intervienen expresiones con variables se llama **ecuación**. En una ecuación se pueden dar las siguientes situaciones excluyentes.

- Que la igualdad sea verdadera para **cualquier valor** de la variable.
- Que la igualdad sea verdadera para **algunos valores** de la variable y para otros, no.
- Que la igualdad no sea verdadera para **ningún valor** de la variable, es decir que sea falsa para todos los valores.

Por ejemplo:

- $3 \cdot m + 5 \cdot m = 8 \cdot m$ es verdadera para cualquier valor de $m$.
- $3 + 5 \cdot m = 8 \cdot m$ es verdadera para algunos valores de $m$ y para otros, no: para $m = 1$ es verdadera, pero para $m = 2$ es falsa.
- $10 \cdot m + 3 = 8 \cdot m + 2 \cdot m$ es falsa para todos los valores de $m$.



**50.** Estudiá si las igualdades son verdaderas para cualquier valor, para algunos valores o para ninguno. Para los casos en los que respondas "para algunos", escribí los valores de la variable que la hacen verdadera. Explicá tus respuestas.

a. $r - 3 = 19$
b. $31 = -31\,y$
c. $6 - n = 26$
d. $3 \cdot x + 2 \cdot x = 5 \cdot x$
e. $4 - 3\,t = 37$
f. $3\,n + 16 - n = 2\,n$
g. $2 \cdot (m + 7) = m + m + 7$
h. $5 \cdot a = 3 \cdot a + 12$
i. $5 \cdot (y + 4) = 2 \cdot (y + 4)$

**51.** Completen las siguientes ecuaciones para que la solución sea la dada.

a. $4\,g - 7 =$ .................... Solución: $g = 1$.
b. $2 \cdot (h + 3) =$ .................................. Solución: cualquier valor de la variable $h$.
c. $j +$ .................... $= 2 \cdot (5 - j)$ Solución: $j = -3$.

**52.** Para hallar la solución de $-15 + 4\,r = 7\,r$, Alejo propone esta estrategia.



*Escribo $-15 + 4\,r = 3\,r + 4\,r$ para ver qué tienen de igual ambas expresiones. Como $4\,r$ está de ambos lados, esa parte da lo mismo para cualquier valor de r. Entonces solo hay que asegurarse de que $-15 = 3\,r$. De esa igualdad leo que $r = -5$ es la solución de la ecuación.*

a. En grupos, analicen si la estrategia le permitió a Alejo encontrar la solución de la ecuación. Escríbanlo en la carpeta.

b. Estudien cómo se puede usar el procedimiento de Alejo para hallar las soluciones de la ecuación $14 + 7\,r = 5\,r + 2$; y para hallar las soluciones de $-14 + 7\,r = 5\,r + 2$.

c. Expliquen cómo puede usarse el procedimiento de Alejo para hallar las soluciones de la ecuación $-3\,n + 1 = -7\,n - 23$.

Los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad se llaman **soluciones** de la ecuación.
Por ejemplo, $a = 6$ es la solución de la ecuación $5 \cdot a = 3 \cdot a + 12$.
Si la igualdad es verdadera para cualquier valor de la variable, las expresiones que están a uno y otro lado del signo igual son expresiones equivalentes.

**53.** a. En grupos, analicen la estrategia de Violeta para hallar la solución de la ecuación $8\,n - 5 = -7\,n + 25$.



*Sumo 7 n a ambos lados del igual, porque para cualquier valor de n estoy sumando el mismo número y, por lo tanto, no estoy cambiando las soluciones. Entonces queda:*

$$8\,n - 5 + 7\,n = -7\,n + 25 + 7\,n$$

*Con esto logré que solo quede buscar las soluciones de la ecuación $15\,n - 5 = 25$. Como $n = 2$ es solución de esta ecuación, entonces también es solución de $8\,n - 5 = -7\,n + 25$.*

b. En la carpeta, expliquen cómo se puede usar el procedimiento de Violeta para hallar las soluciones de la ecuación $16 - 8\,n = -17 + 3\,n$.

**54.** En cada caso, expliquen cómo se puede usar el procedimiento de Violeta o el de Alejo para hallar las soluciones de estas ecuaciones.

a. $27 - 2\,x = -3 - 17\,x$ ........................................

........................................

b. $11\,r + 5 = -2\,r + 18$ ........................................

........................................

En las tres actividades anteriores analizaron estrategias para hallar las soluciones de ecuaciones en las que la variable aparece en ambos lados de la igualdad. En todas las estrategias se trató de transformar la ecuación en otra en la que la variable solo apareciera en un lado del signo igual, sin modificar las soluciones.
Por ejemplo, para resolver la ecuación $-6\,x + 7 = 19 - 10\,x$, se puede pensar de dos maneras:

- Transformar el lado derecho y escribir: $-6\,x + 7 = 19 - 4\,x - 6\,x$, y como $-6\,x$ está de ambos lados, esa parte de la igualdad da lo mismo para cualquier valor de la variable $x$; por eso para hallar las soluciones de la primera ecuación solo hay que asegurarse de que $7 = 19 - 4\,x$.
- Sumar $10\,x$ en ambos lados del signo igual, porque lo que se suma da lo mismo para cualquier valor de la variable $x$. Así queda la ecuación: $4\,x + 7 = 19$, que hay que resolver.

Cuando dos ecuaciones tienen las mismas soluciones se dice que son **equivalentes**.

**55.** En la carpeta, encontrá, si existen, las soluciones enteras de cada ecuación. Si no existen, justificalo.

a. $13 + 7\,x = 2 \cdot (x - 1)$

b. $15 - (j + 5) = -2 \cdot (2\,j + 1)$

c. $(-5 + m) \cdot 3 + 5 = -16 - 3\,m$

d. $4 \cdot (3 - n) = 2 \cdot (6 - 2\,n)$

e. $5\,n - 8\,n + 3 = 3 \cdot (7 - n)$

f. $3\,h - 2 = 18$

g. $(r - 11) \cdot (r + 5) = 0$

h. $x^2 = 36$

i. $x^2 + 5 = 21$

j. $p^2 = -25$




# Más actividades

**1.** Resolvé estas multiplicaciones.

a. –47 · 1 = ..........
b. –21 · 2 = ..........
c. 3 · (–10) = ..........
d. 33 · (–3) = ..........
e. –11 · (–9) = ..........
f. 524 · (–1) = ..........

**2.** En cada caso, hallá, si es posible, un número entero que cumpla lo pedido.

a. Al multiplicarlo por 4 da –20. ..........
b. Al multiplicarlo por –4 da –20. ..........
c. Al multiplicarlo por –4 da –34. ..........
d. Al multiplicarlo por –5 da 10. ..........

**3.** a. ¿Es cierto que si se resta de 8 en 8 empezando desde 0, se nombra el número –324? ¿Por qué?

..........

b. Proponé tres números menores que –3.211 que se nombrarían al restar de 8 en 8 desde el 0.

..........

**4.** En cada caso, escribí un número positivo para que el resultado de la suma sea el múltiplo de 8 más cercano al número dado. Explicá tus respuestas en la carpeta.

a. 167 + ..........
b. 176 + ..........
c. 370 + ..........
d. –370 + ..........
e. –2.525 + ..........
f. –13.240 + ..........

**5.** En esta recta numérica están ubicados el 0 y el producto –8 · 15. Ubicá, de la manera más precisa posible, los productos: –4 · 15; 2 · 15; –7 · 15 y 16 · 15. Explicá cómo decidiste dónde marcarlos.




..........

..........

**6.** Decidí, sin hacer divisiones, si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificalo en la carpeta.

a. –150 es divisor de 15.
b. –6 es divisor de 2.400.
c. 7.004 es múltiplo de 7.
d. 14 es divisor de 2.814.

**7.** Estudiá la información que ofrece la siguiente cuenta para decidir si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá tus decisiones.




a. 1.750 es múltiplo de 14.
b. –14 es divisor de 1.750.
c. 14 es divisor de 125.
d. 1.764 es múltiplo de 14.
e. 14 es divisor de –1.750 – 14.
f. –1.746 es divisible por 14.
g. 14 es múltiplo de 125.
h. 125 es divisor de 1.750.

**8.** Escribí cuatro multiplicaciones que den el mismo resultado que –24 · 21.

**9.** En cada caso, sin hacer cuentas de multiplicar, escribí dos expresiones equivalentes.

a. $-36 \cdot 27$ ..........  b. $29 \cdot 7 + 7$ ..........

c. $37 \cdot 11 - 11$ ..........  d. $572 \cdot 17 - 600 \cdot 17$ ..........

e. $31 \cdot (-5) + 31 \cdot (-2)$ ..........  f. $59 \cdot (-13) + 59 \cdot 2$ ..........

**10.** A partir de las expresiones equivalentes que escribiste en la actividad anterior, anotá cuatro divisores de cada una de las expresiones. Explicá tus respuestas.

..........

**11.** Estudiá la información que ofrece la siguiente cuenta.




a. En la recta numérica ubicá, de la manera más precisa posible, los números 462; 467; 462 – 14; 462 – 21 y 478. Explicá cómo decidiste dónde marcar los números.

$14 \cdot 32$ — $14 \cdot 33$ — $14 \cdot 34$

b. En la recta numérica ubicá, de la manera más precisa posible, los números –462; $14 \cdot (-32)$; –467; –441 y –478. Explicá cómo decidiste dónde marcar los números.

$14 \cdot (-33)$

**12.** Decidí si los cálculos son correctos. Para hacerlo, podés usar lo analizado en la actividad anterior. Explicá tus decisiones.

a. $467 = 14 \cdot 33 + 5$  b. $-462 = 14 \cdot (-33)$

c. $462 = 14 \cdot 34 - 14$  d. $-467 = 14 \cdot (-33) + 5$

e. $-467 = 14 \cdot (-34) + 9$  f. $-448 = 14 \cdot (-33) + 13$

g. $-478 = 14 \cdot (-34) - 2$  h. $-478 = 14 \cdot (-35) + 12$

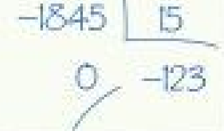
**13.** Encontrá el cociente y el resto de las siguientes divisiones. Justificá tus respuestas.

a. 


b. 


c. 


**14.** Estudiá la información que ofrece la siguiente cuenta para decidir si las igualdades son correctas. Podés usar una recta numérica para responder. Explicá tus decisiones.




a. $-1.847 = 15 \cdot (-123) + 2$  b. $-1.847 = 15 \cdot (-123) - 2$

c. $-1.847 = 15 \cdot (-124) + 13$  d. $-1.844 = 15 \cdot (-123) - 1$

e. $-1.844 = 15 \cdot (-122) + 14$  f. $-1.844 = 15 \cdot (-123) - 14$




**15.** a. Encontrá, si es posible, tres valores enteros de $m$ para los que $8 \cdot m + 3$ sea múltiplo de 8. Escribí cuántos valores de $m$ podés encontrar.

b. Encontrá, si es posible, tres valores enteros de $r$ para los que $5 \cdot (r + 2)$ sea múltiplo de 10. Escribí cuántos valores de $r$ podés encontrar.

**16.** Decidí cuáles de estas expresiones dan números pares para todo valor entero de $m$. Justificalo.

a. $(m + 1) \cdot 3 - 8$ b. $(2\,m + 4) \cdot (-6) + 10$ c. $(-2\,m + 1) \cdot 7 + 10$

**17.** Para cada una de las afirmaciones, proponé, si es posible, tres valores de $n$ para los que la afirmación sea verdadera y tres valores para los que la afirmación sea falsa. Si no es posible, explicá por qué.

a. $15 \cdot n + 6$ es un múltiplo de 3.
b. $15 \cdot n + 6$ es un múltiplo de 2.
c. $15 \cdot n + 6$ es un múltiplo de 5.
d. $15 \cdot n + 6$ es un múltiplo de 6.

**18.** Para las afirmaciones de la actividad anterior, encontrá, si es posible, todos los valores de la variable para los que esta es verdadera.

**19.** Decidí si los siguientes pares de expresiones son equivalentes. Justificá tus decisiones.

a. $3 \cdot (n + 2)$ $n + n + n + 2$
b. $(2\,r + 3) \cdot 14$ $28\,r + 42$
c. $-4 \cdot (3\,n + 2) + 2\,n$ $-5 \cdot (2\,n + 1) - 3$
d. $5 \cdot (j + 2) - (j + 2)$ $4 \cdot (j + 2)$

**20.** En cada caso, transformá la expresión dada en una equivalente.

a. $(r - 3) \cdot 5$ b. $-3 \cdot (m + 4)$ c. $9 \cdot (3 + 2\,j)$
d. $p + (3 + 2\,p) \cdot 2$ e. $4 \cdot (3\,x + 4) - 12\,x$ f. $t - (4 - 5\,t)$
g. $2\,x + (2 - x) \cdot (-3)$ h. $k - 1 + k - 1 + k - 1 + 3$ i. $-3 \cdot (a - b) + 3 \cdot (b - a)$

**21.** En cada caso, estudiá para qué valores de la variable $k$ se cumple lo pedido.

a. El resultado de $4\,k - 14\,k$ termina en 0.
b. $3 \cdot (2\,k + 4) + k + 1$ da par.
c. El resultado de $7 \cdot (-2\,k + 3) + 2\,k + 1$ es impar.
d. El resultado de $(2\,k - 1) \cdot 5$ termina en 0.

**22.** Hallá, si existen, las soluciones enteras de cada ecuación. Si no existen, explicá por qué.

a. $x - 8 = 15$ b. $-22 = 22\,y$ c. $3\,m = 0$
d. $3 - p = 9$ e. $(r + 2) \cdot (-3) = 21$ f. $9 = -5 \cdot a$
g. $-b + (3 + 2\,b) \cdot (-2) = 27$ h. $-2\,m - 3 \cdot (3 - m) = m$ i. $3 + 3\,r + 4 \cdot (r - 1) = -1 + 7\,r$

**23.** Completá las siguientes ecuaciones para que las soluciones sean las dadas.

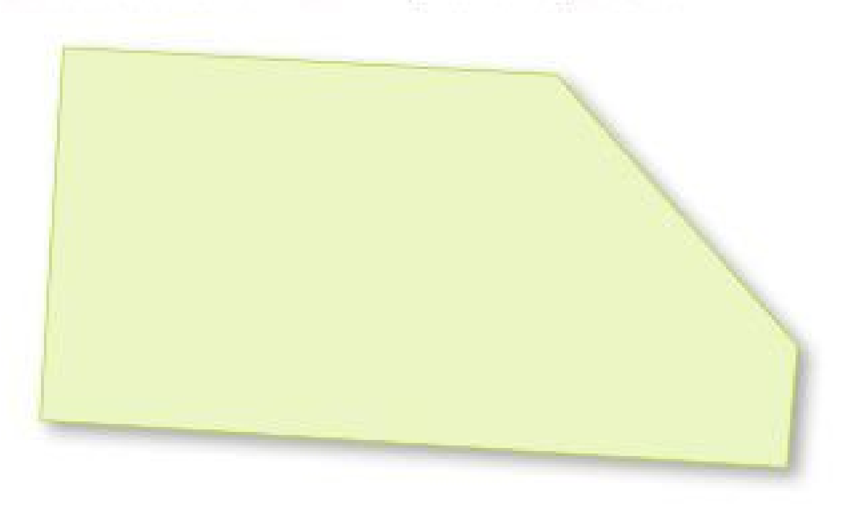
a. $3\,n + 5 =$ ........................ Solución: $n = 5$.
b. $4 \cdot (m + 3) =$ ........................ Solución: cualquier valor de la variable $m$.
c. ........................ $= 6\,k - (1 - 2\,k)$ Solución: ningún valor de la variable $k$.

Capítulo 3

**Geometría:** área y perímetro; comparación de áreas; fórmulas para calcular áreas y estudiar variaciones.

# Área y perímetro

**1.** Simón tenía una cartulina rectangular, la recortó y quedó como muestra el dibujo. Él dice que la cartulina ahora tiene menor área y mayor perímetro. ¿Estás de acuerdo con Simón? Explicá tu respuesta.



.................................................................................................

.................................................................................................

.................................................................................................

El **perímetro** de un polígono se calcula sumando las medidas de los lados que forman su contorno.
El **área** es la medida de la región delimitada por ese contorno.

## Área y perímetro de polígonos

**2.** En cada caso, explicá cómo recortarías la cartulina para que la figura resultante tenga las condiciones pedidas. Dibujala en tu carpeta.



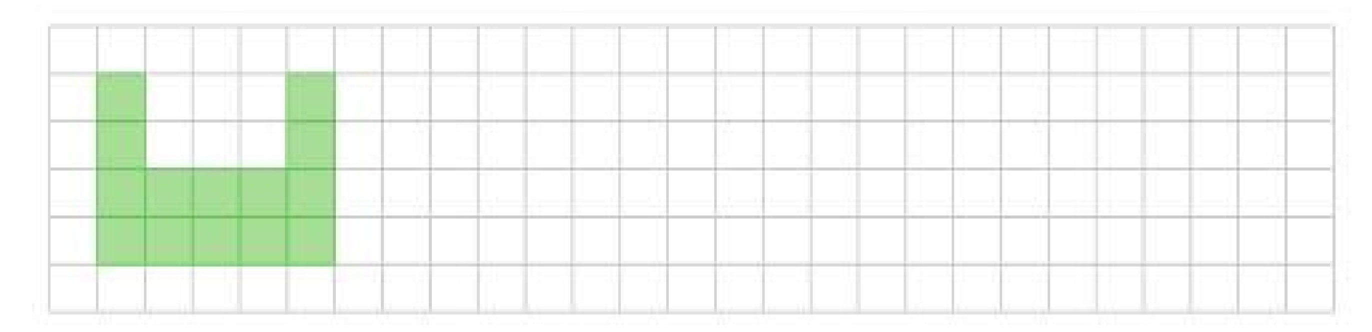
a. Tiene menor área e igual perímetro.

b. Tiene menor área y mayor perímetro.

**3.** En cada caso, dibujá en la cuadrícula un polígono que cumpla lo pedido.

a. Tiene mayor área e igual perímetro que el polígono verde.

b. Tiene mayor área y menor perímetro que el polígono verde.





**4.** En grupos, decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen sus decisiones en la carpeta.

a. Si un polígono tiene mayor área que otro, su perímetro también es mayor.

b. Si dos polígonos tienen la misma área, su perímetro también es igual.

c. Si el perímetro de un polígono es menor que el de otro, su área también es menor.

d. Dos polígonos pueden tener la misma área y no ser congruentes.

e. Dos polígonos pueden tener el mismo perímetro y no ser congruentes.

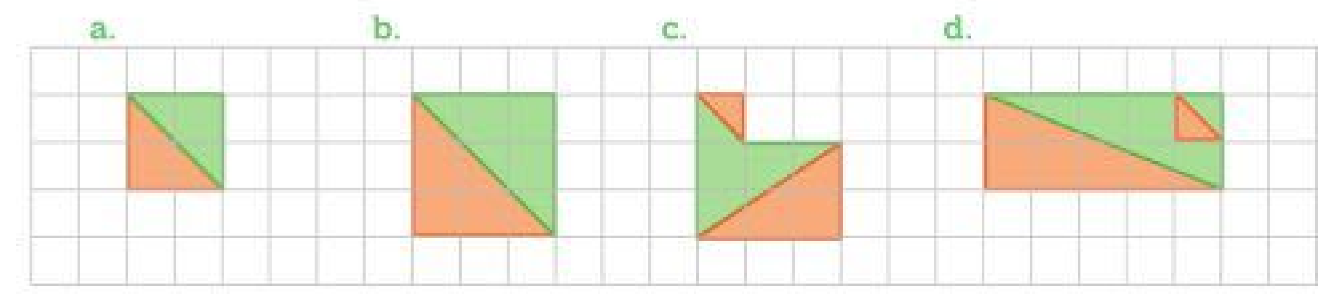
**5.** En grupos, completen la siguiente afirmación.

Al estudiar las áreas y los perímetros de dos polígonos concluimos que ..........

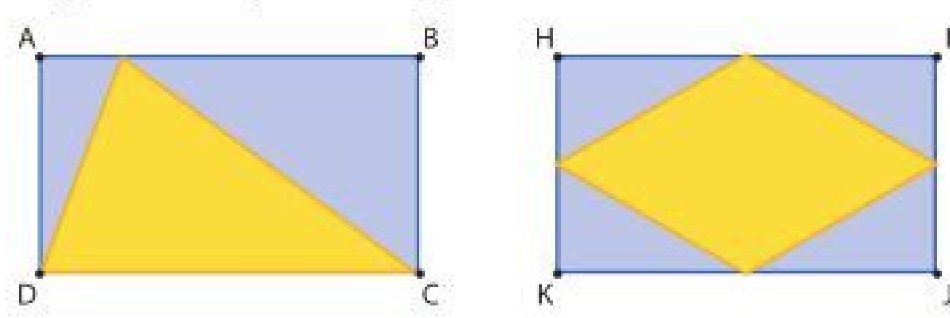
Se dice que dos polígonos son **congruentes** si los lados de uno miden lo mismo que los lados del otro y los ángulos comprendidos también son iguales. Si esto sucede, los dos polígonos coincidirán totalmente al superponerlos.

## Comparación de áreas

**6.** Sin usar la regla para medir, decidí, para cada polígono, si el área de la zona anaranjada es mayor, menor o igual que el área de la zona verde.

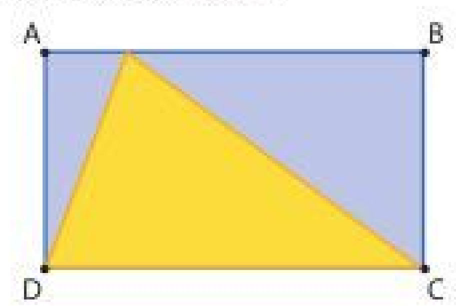


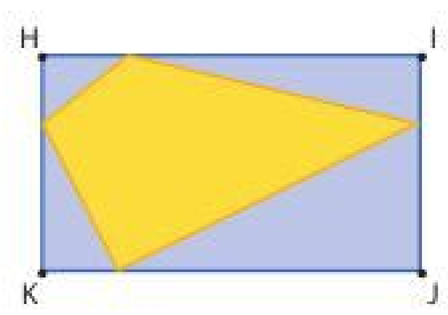

**7.** Los rectángulos ABCD y HIJK son iguales.



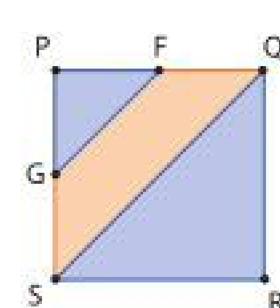

a. Juliana dice que las figuras amarillas tienen la misma área. Alejandra le responde que es imposible, porque una es un triángulo y la otra es un rombo. ¿Estás de acuerdo con alguna de ellas? Justificá tu decisión sin medir.

b. En este caso, Juliana dice que las áreas de las figuras amarillas no son iguales, porque la de la derecha no es un rombo. ¿Estás de acuerdo con ella? Justificá tu decisión sin medir.

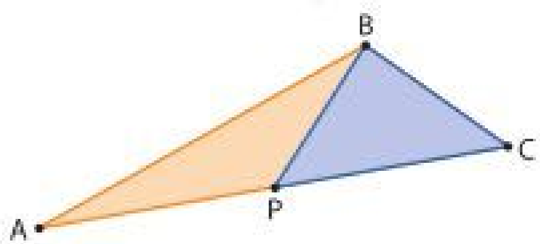



**8.** PQRS es un cuadrado, F y G son los puntos medios de dos de sus lados. Sin medir, estudiá con un compañero qué relación hay entre el área de la superficie anaranjada y el área del cuadrado. Justifiquen su respuesta en la carpeta.



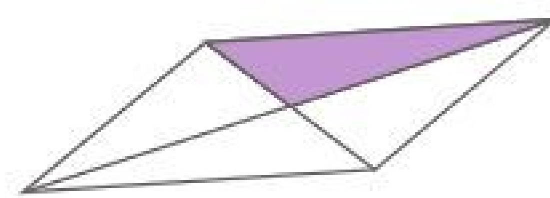
**9.** Compará, en cada caso, las áreas de los triángulos nombrados, sin medir y sabiendo que P es el punto medio del segmento AC.




a. Los triángulos APB y PCB.

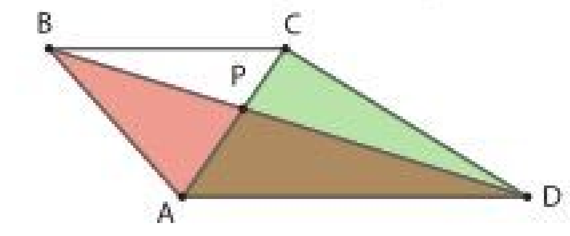
b. Los triángulos APB y ACB.

**10.** En la carpeta, justificá con un compañero, sin medir, por qué el área del triángulo violeta es un cuarto del área del paralelogramo.



Las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

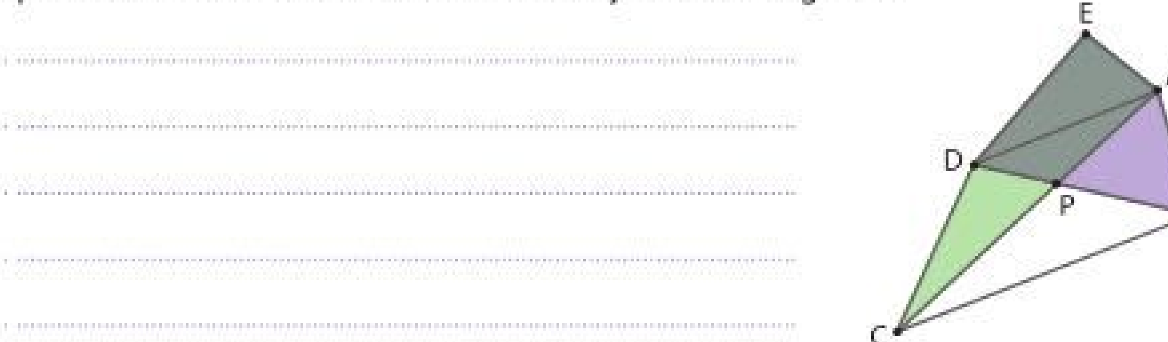
**11.** En el cuadrilátero ABCD, los lados AD y BC son paralelos.




a. Justificá, sin medir, por qué las áreas de los triángulos ADC y ADB son iguales.

b. Encontrá con un compañero otros dos pares de triángulos que tengan la misma área. Justificá, sin medir, por qué esos triángulos cumplen lo pedido.

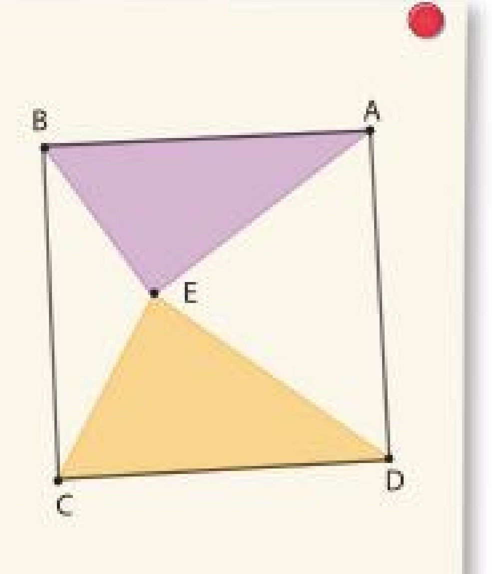
**12.** En esta figura, $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ son paralelos. Sin medir, justificá con un compañero por qué las áreas de los cuadriláteros ACDE y DBAE son iguales.




A partir de lo estudiado en las actividades 11 y 12, se puede generalizar una técnica para comparar áreas de dos figuras: primero hay que identificar los triángulos que forman parte de esas dos figuras y que tienen igual base e igual altura, por lo cual las áreas de estos triángulos serán iguales, y después se les puede quitar o agregar el área de una figura en común.

**13.** Seguí las instrucciones para construir una figura como esta en la computadora, usando el programa GeoGebra. Entre paréntesis están indicados los nombres que el programa le da a cada objeto. Luego, respondé las preguntas en la carpeta con un compañero, moviendo el punto E dentro del cuadrado.

1. Seleccionar la herramienta Polígono regular y marcar dos puntos en la pantalla. Luego, ingresar "4" para que el programa realice un cuadrado (ABCD).
2. Con la herramienta Punto marcar un punto (E) dentro del cuadrado.
3. Seleccionar la herramienta Polígono y marcar los triángulos AEB y CED, para eso hay que hacer clic sobre cada uno de los tres vértices y, luego, volver a hacer clic sobre el primero para cerrar cada triángulo.




a. ¿Dónde ubicarían el punto E para que las áreas de los triángulos AEB y CED sean iguales?

b. ¿Dónde ubicarían el punto E para que el área del triángulo AEB sea mayor que la del triángulo CED?

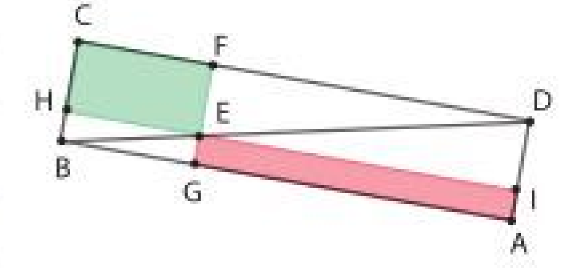
c. ¿Dónde ubicarían el punto E para que el área del triángulo CED sea un cuarto del área del cuadrado?

d. ¿Dónde ubicarían el punto E para que la suma de las áreas de AEB y CED sea mayor a la suma de las áreas de CEB y AED?

e. Si se agranda o se achica el cuadrado, moviendo el vértice A o el vértice B, ¿cambiarán las respuestas anteriores?

En GeoGebra pueden usar la herramienta "Área" para medir las áreas que consideren convenientes. Para trazar segmentos pueden utilizar la herramienta "Segmento" y para marcar puntos medios, la herramienta "Punto Medio o Centro".

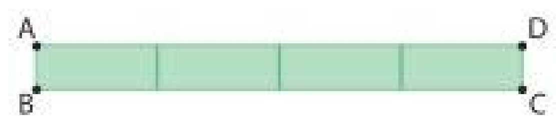
**14.** En un rectángulo ABCD se trazan dos segmentos, $\overline{HI}$ paralelo a $\overline{CD}$ y $\overline{FG}$ paralelo a $\overline{BC}$, de manera que el punto de intersección E esté ubicado en la diagonal BD. Con un compañero ubicá, si es posible, el punto E sobre algún lugar de la diagonal BD, de manera tal que el área del rectángulo CFEH sea mayor que el área del rectángulo EIAG. Pueden hacer la construcción en GeoGebra para explorar esta situación. Justifiquen su decisión.




Para trazar rectas paralelas o perpendiculares con GeoGebra hay que utilizar las herramientas "Recta Paralela" y "Recta Perpendicular", respectivamente.

# Fórmulas para calcular áreas y perímetros

**15.** El rectángulo ABCD está formado por 4 rectángulos iguales de 72 cm de perímetro, ensamblados como muestra la figura. En cada rectángulo, la base mide el triple que la altura.

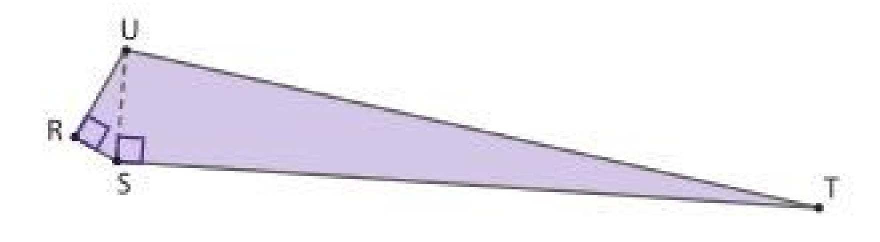



a. Calculá el área y el perímetro del rectángulo ABCD.

b. Si los cuatro rectángulos estuviesen apilados uno sobre el otro, ¿cambiaría el área de la figura que se obtiene? ¿Y el perímetro?

Las figuras de las actividades 15 y 16 no respetan las medidas dadas en el texto. Por eso, para calcular el área y el perímetro, no se puede medir sobre ellas.

**16.** El cuadrilátero RSTU fue construido con dos triángulos rectángulos, como muestra la figura. El segmento RS mide 5 cm, $\overline{US}$ mide 13 cm y $\overline{ST}$, 84 cm. Calculá el perímetro y el área del cuadrilátero RSTU.




Una manera de enunciar el Teorema de Pitágoras, que es útil para pensar la actividad 16, es la siguiente: en cualquier triángulo rectángulo, si sus catetos miden *a* y *b*, y su hipotenusa mide *h*, se cumple $h^2 = a^2 + b^2$.

El área de un triángulo, una vez elegida una base *b* y su altura relativa *h*, se puede calcular con la fórmula: Área = $\frac{b \cdot h}{2}$.

**17.** En la actividad 8 de la página 38 encontraron una relación entre el área de la zona anaranjada y la del cuadrado PQRS. Calculá, en la carpeta, el área y el perímetro del polígono GFQS, sabiendo que el segmento SR mide 10 cm.

**18.** En tu carpeta, dibujá con un compañero un cuadrilátero de 39 $cm^2$ de área y que esté formado por un rectángulo y un triángulo.

**19.** El polígono FGHJK está formado por un cuadrado y un triángulo equilátero. Si se varía la medida del segmento KJ, llamado *c*, se obtiene un polígono similar pero de distinto tamaño.

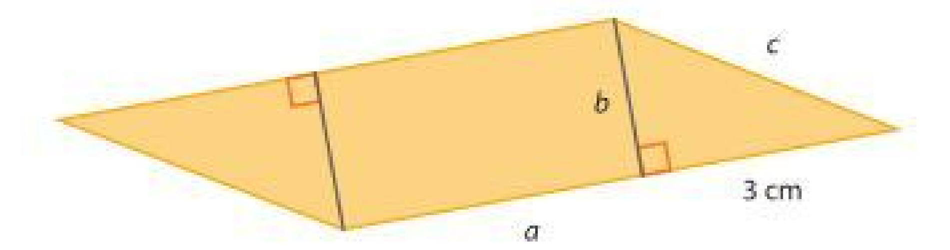
a. Si *c* = 4 cm, ¿cuánto valen el área y el perímetro del polígono FGHJK?

b. Si *c* = 3 cm, ¿cuánto vale el perímetro del polígono FGHJK?

Te sugerimos entrar en *http://goo.gl/uUR6YD* para ver los polígonos que se obtienen en la actividad 19.
Para explorar las áreas y perímetros podés usar las herramientas "Área" y "Distancia o longitud", respectivamente.

# Fórmulas para estudiar áreas y variaciones

**20.** Este paralelogramo está formado por dos triángulos rectángulos iguales y un rectángulo. Los catetos del triángulo miden *b* (en cm) y 3 cm, y la hipotenusa mide *c* (en cm). Los lados del rectángulo miden *a* y *b* (en cm). Resolvé las consignas en la carpeta con un compañero.




a. Indiquen cuáles de estas fórmulas permiten calcular el perímetro del paralelogramo. Justifiquen sus decisiones y expliquen por qué las que descartaron no permiten calcular el perímetro.

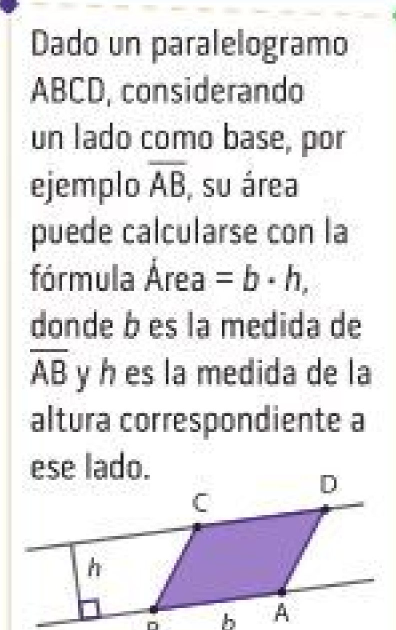
$P = (a + 3) \cdot 2 + 2b + 2c$ $P = (a + 3) \cdot 2 + 2c$ $P = 6 + 2a + 2c$

b. Indiquen cuáles de las siguientes fórmulas permiten calcular el área del paralelogramo. Justifiquen sus decisiones y expliquen por qué las que descartaron no permiten calcular el área.

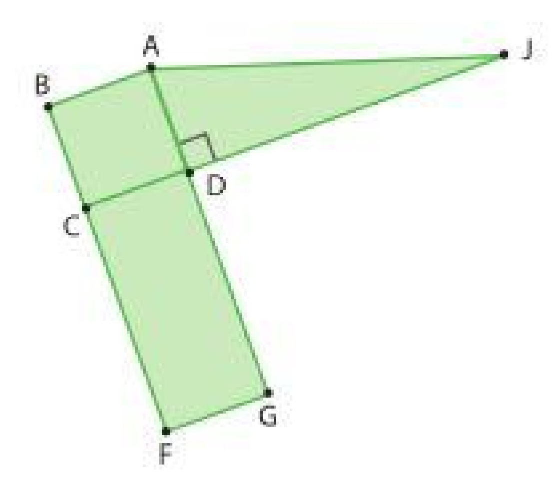
$A = a \cdot b$ $A = (a + 3) \cdot c$ $A = (a + 3) \cdot b$

$A = a \cdot b + 2 \cdot \frac{3 \cdot c}{2}$ $A = 2 \cdot \frac{3 \cdot b}{2} + a \cdot b$ $A = a \cdot b + 3 \cdot b$

Dado un paralelogramo ABCD, considerando un lado como base, por ejemplo $\overline{AB}$, su área puede calcularse con la fórmula Área = $b \cdot h$, donde *b* es la medida de $\overline{AB}$ y *h* es la medida de la altura correspondiente a ese lado.




**21.** Esta figura fue construida con un cuadrado, un rectángulo y un triángulo rectángulo; $\overline{AB}$ mide *a* (en cm), $\overline{CF}$ mide 2 cm más que $\overline{AB}$, y $\overline{DJ}$ mide 7 cm. Indicá cuáles de estas fórmulas permiten calcular el área del polígono verde. Justificá tus decisiones en la carpeta y explicá por qué las que descartaste no permiten calcular el área.

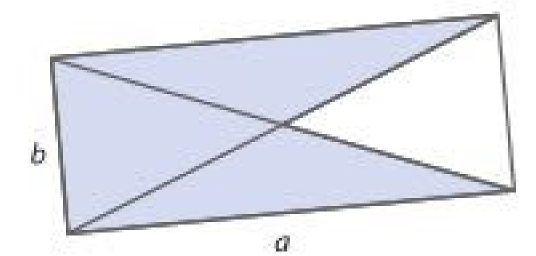



$A = a^2 + 2a + \frac{a \cdot 7}{2}$ $A = (a + 2) \cdot a + a^2 + \frac{a \cdot 7}{2}$ $A = (a + 2) \cdot a + a^2 + a \cdot 7$

$A = (a + 2) \cdot a + (a + 7) \cdot a - \frac{a \cdot 7}{2}$ $A = 2a^2 + \frac{11}{2}a$ $A = a^2 + 2 \cdot a^2 + \frac{a \cdot 7}{2}$

**22.** En grupos, hagan el dibujo de una figura cuya área se pueda calcular con la fórmula $A = (a + 3) \cdot 5 + 9$, en la que *a* sea la medida de algún segmento.

**23.** Los lados de este rectángulo miden *a* y *b*.




Recordá que las diagonales de un rectángulo miden lo mismo y se cortan en sus puntos medios.

a. Pensá una fórmula que permita calcular el área de la región celeste. Anotala en un papel sin realizar ninguna aclaración.

b. Intercambiá las fórmulas con tu compañero y analizá si la que recibiste permite calcular el área de la región celeste. Si es la misma, piensen entre los dos una fórmula distinta.

**24.** Un rectángulo tiene un lado que mide 4 cm y otro que mide *h* (en cm). Estudiá si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus respuestas.

a. Si se duplica *h*, el nuevo rectángulo tiene el doble de área.

b. Si se duplica *h*, el nuevo rectángulo tiene el doble de perímetro.

c. Si se duplican ambos lados, se duplica el área del rectángulo.

d. Si se duplican ambos lados, se duplica el perímetro del rectángulo.



**25.** Estudiá con un compañero si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen sus decisiones.

a. Si se duplica la medida del lado de un cuadrado, entonces su perímetro también se duplica.

b. Si se triplica la medida del lado de un cuadrado, entonces su perímetro también se triplica.

c. Si se duplica la medida del lado de un cuadrado, entonces su área también se duplica.

d. Si se triplica la medida del lado de un cuadrado, entonces su área es 9 veces el área del primero.

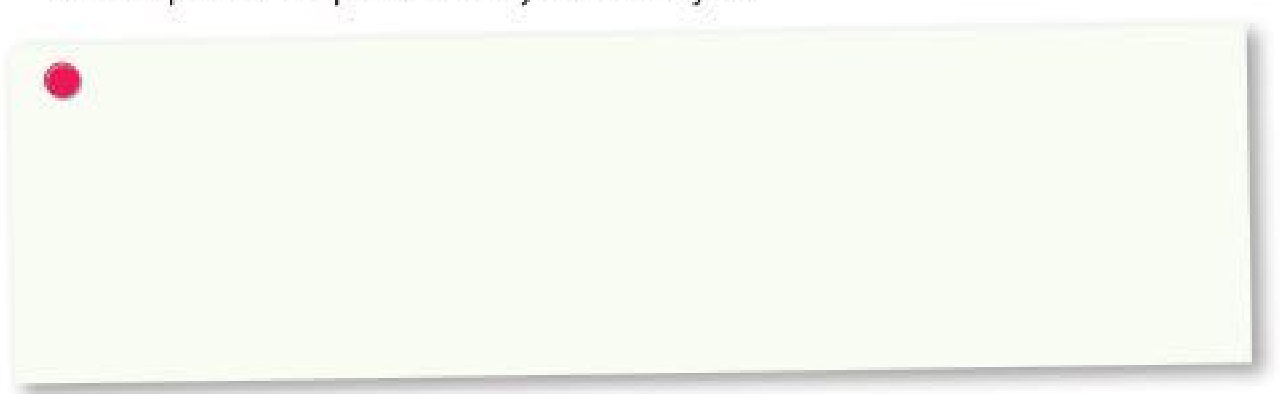
**26.** Completá las afirmaciones para que resulten verdaderas. Explicá en tu carpeta cómo las pensaste.

a. Si se duplican las medidas de la base y de la altura de un triángulo, el área del nuevo triángulo ............................................................ .

b. Si se triplican las medidas de la base y de la altura de un triángulo rectángulo, el perímetro del nuevo triángulo ............................................................ .

c. Si se duplica la medida de un cateto de un triángulo rectángulo y el otro cateto continúa de la misma medida, el área del nuevo triángulo ............................................. .

**27.** De dos paralelogramos se sabe que el área de uno es 6 cm² y el área del otro es 12 cm². ¿Se puede asegurar que el perímetro de uno será el doble que el del otro? Explicá tu respuesta incluyendo dibujos.



**28.** La base y la altura de un paralelogramo miden *b* y *h*, respectivamente. Estudiá si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus respuestas en la carpeta.

a. Si se duplican la base y la altura, entonces el área del nuevo paralelogramo puede calcularse haciendo $4 \cdot b \cdot h$.

b. Si se triplica la medida de la base y la altura se mantiene igual, entonces el área del nuevo paralelogramo puede calcularse haciendo $9 \cdot b \cdot h$.

**29.** Un rombo tiene una diagonal que mide 6 cm y la otra diagonal mide *d* cm.

a. ¿Cuánto mide el lado si *d* es 8 cm? ¿Cuál será el área? ¿Y el perímetro?

b. Si *d* es cualquier medida, al duplicar *d*, ¿el nuevo rombo tiene el doble de perímetro que el original?

c. Si *d* es cualquier medida, al duplicar *d*, ¿el nuevo rombo tiene el doble de área que el original?

> Recordá que las diagonales de un rombo se cortan en sus puntos medios y son perpendiculares entre sí. Además, si estas miden *d* y *D*, su área se calcula: Área = $\frac{d \cdot D}{2}$, ya que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo cuyos lados miden *d* y *D*.

**30.** Respondé estas preguntas con un compañero. Justifiquen sus respuestas.

a. ¿Es cierto que si a todos los lados de un rectángulo se les suman 3 cm, el perímetro aumenta 12 cm?

b. ¿Es cierto que si a todos los lados de un rectángulo se les suman 3 cm, el área aumenta 9 cm²?

c. Si los lados de un rectángulo miden *a* y *b*, ¿cuánto aumenta el área del rectángulo si se aumenta 2 cm el lado que mide *a* y se aumenta 4 cm el lado que mide *b*?

> Para resolver esta actividad, puede ser útil hacer un esquema.

## Más actividades

**1.** a. Construí en tu carpeta dos polígonos de igual área y diferente perímetro.

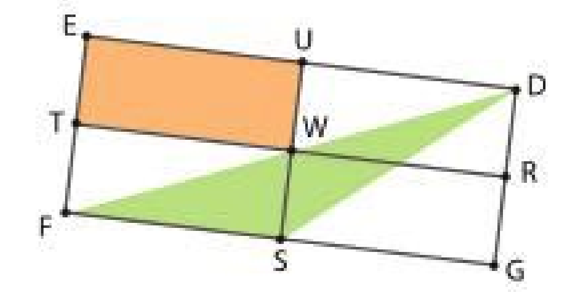
b. Construí en tu carpeta dos polígonos de igual perímetro y diferente área.

**2.** Construí en esta cuadrícula tres rectángulos de la misma área que el polígono anaranjado, de manera tal que uno tenga mayor perímetro, otro igual y el tercero tenga menor perímetro.



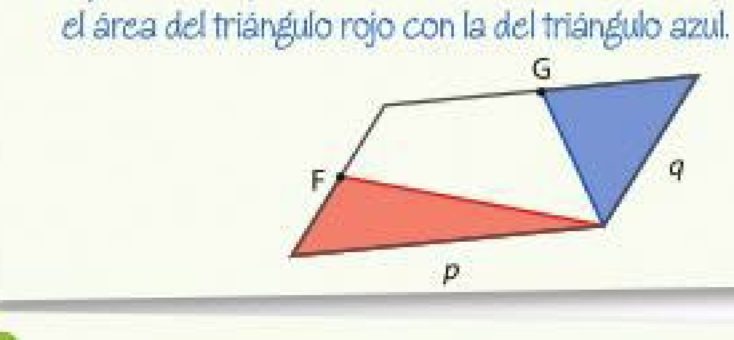
**3.** DEFG es un rectángulo, RT y US son los segmentos que pasan por los puntos medios de dos lados y son paralelos a los otros dos. Compará, sin medir, el área del rectángulo anaranjado con la del triángulo verde.

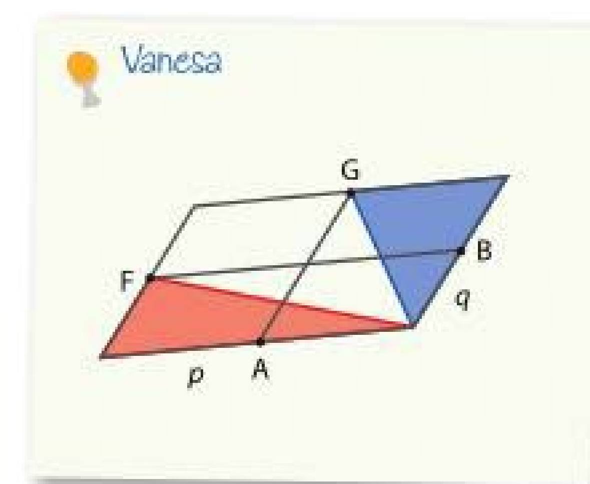





**4.** Vanesa tenía que resolver este problema. Para hacerlo, se le ocurrió trazar los segmentos GA y FB paralelos a cada lado. ¿Cómo continuarías el procedimiento de Vanesa?

Las medidas de los lados de este paralelogramo son p y q. F y G son los puntos medios de cada lado. Compará, sin medir, el área del triángulo rojo con la del triángulo azul.



**5.** MNPQ es un rectángulo y $\overline{UT}$ es paralelo a $\overline{MN}$. Justificá con un compañero, sin medir, por qué los triángulos rojo y azul tienen la misma área. Pueden usar las conclusiones obtenidas al resolver la actividad 14 de la página 40.

.................................................................................

.................................................................................

.................................................................................

.................................................................................

**6.** MNPQ es un rectángulo, $\overline{WS}$ es paralelo a $\overline{MQ}$, $\overline{UT}$ es paralelo a $\overline{MN}$ y O es el punto medio de las diagonales del rectángulo UPSV. Compará el área amarilla con la violeta, sin medir.

.................................................................................

.................................................................................

.................................................................................

.................................................................................

**7.** En el siguiente dibujo hay un triángulo ABC, otro triángulo BCF, un rectángulo DEFC y un paralelogramo CGHF. Sabiendo que las rectas *k* y *j* son paralelas y que C es el punto medio de $\overline{AF}$, compará, sin medir, las áreas de los cuatro polígonos mencionados.

.................................................................................

.................................................................................

**8.** En esta figura se observa un rombo ABCD, un rectángulo CEFA, un triángulo ACG y un paralelogramo HCDI. Sabiendo que D es el punto medio de $\overline{IG}$, compará, sin medir, las áreas de los cuatro polígonos mencionados.

.................................................................................

.................................................................................

.................................................................................

.................................................................................

**9.** a. Las diagonales de un rombo miden 16 cm y 12 cm. Calculá su área y su perímetro.

.................................................................................

.................................................................................

b. Se quiere trazar un rectángulo que tenga la misma área que el rombo, pero mayor perímetro. ¿Cuánto podrían medir sus lados? ¿Hay otro rectángulo no congruente que cumpla lo pedido?

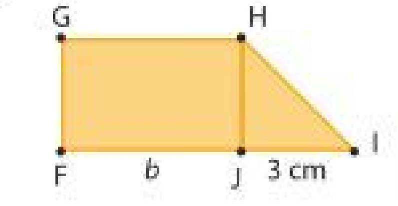
.................................................................................

**10.** El cuadrilátero ABCD está formado por el paralelogramo EBCD y el triángulo isósceles ABE. El área del paralelogramo es 30 cm², su lado ED mide 10 cm y el área del cuadrilátero ABCD es 36 cm². Calculá la longitud de $\overline{CD}$.




**11.** Con un rectángulo y un triángulo rectángulo isósceles se formó el cuadrilátero FGHI. La medida de $\overline{FJ}$ se llama *b* y puede ir variando, de manera que, para cada valor que se le asigne, se obtiene un polígono distinto. La medida de $\overline{JI}$ siempre es 3 cm.

a. Calculá el área y el perímetro del cuadrilátero FGHI cuando *b* mide 5 cm.

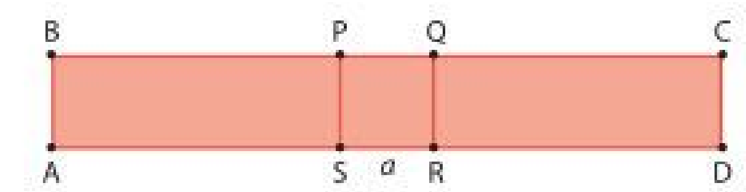



b. ¿Qué valor se le tiene que dar a *b* para que el área del FGHI sea $\frac{29}{2}$ cm²?

c. Escribí una fórmula que permita calcular el área del cuadrilátero FGHI para cualquier valor de *b*.

d. Compará la fórmula que escribiste con la de un compañero. ¿Son equivalentes?

**12.** El rectángulo ABCD se formó con un cuadrado y dos rectángulos iguales; $\overline{SR}$ mide *a* (en cm) y $\overline{RD}$ mide 3 cm más que $\overline{SR}$.




a. Indicá cuáles de estas fórmulas permiten calcular el perímetro del rectángulo ABCD. ¿Por qué? Explicá en tu carpeta por qué no sirven las que descartaste.

$P = 2 \cdot [(a + 3) \cdot 2 + 2\,a] + 4\,a$ $P = 2\,a + 4 \cdot (a + 3) + 2\,a$ $P = 8\,a + 12$

b. Indicá cuáles de estas fórmulas permiten calcular el área del rectángulo ABCD. ¿Por qué? Explicá en tu carpeta por qué no sirven las que descartaste.

$A = a^2 + (a + 3)^2$ $A = a^2 + 2 \cdot (a + 3) \cdot a$ $A = (3\,a + 6)^2$

$A = (3\,a + 6) \cdot a$ $A = 3\,a^2 + 6\,a$ $A = a \cdot (a + 3) + a \cdot a + (a + 3) \cdot a$

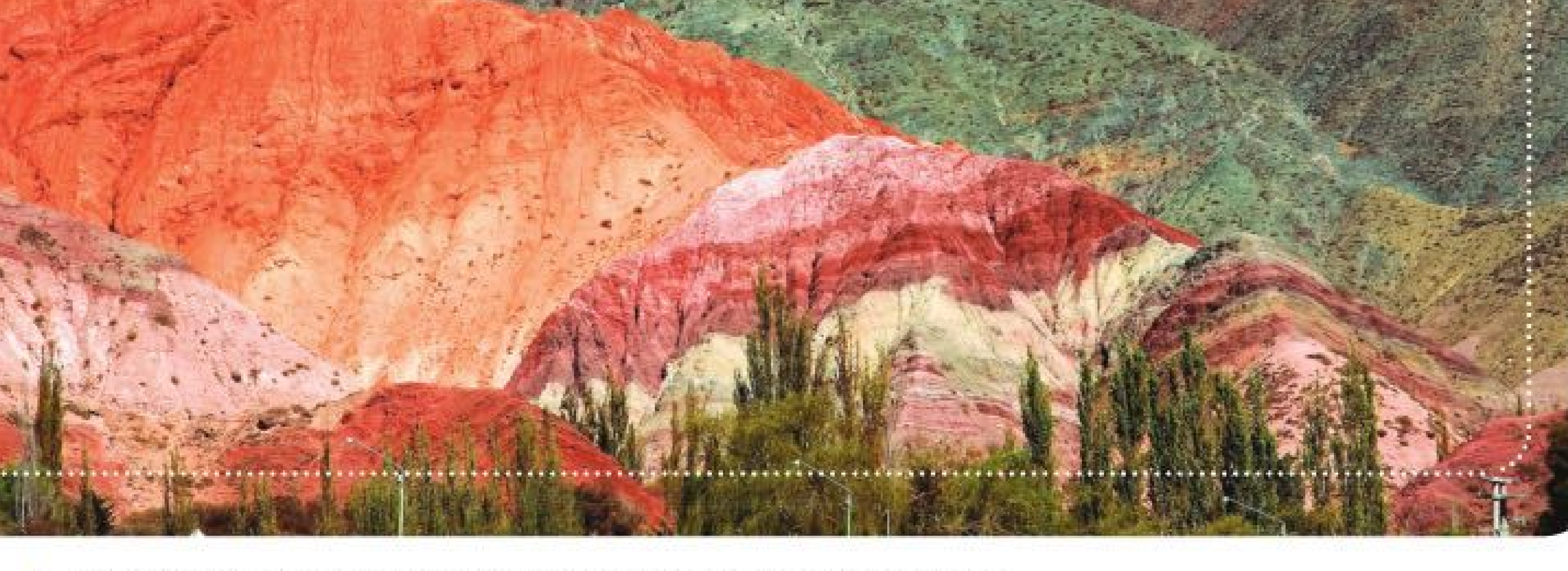
**13.** Trazá en tu carpeta una figura formada solamente por paralelogramos y triángulos, cuya área pueda calcularse con la fórmula A = 2 *b* + 3, en la que *b* sea la medida de algún segmento.




Capítulo 4

**Análisis de funciones:** lectura y producción de gráficos, tablas y fórmulas.

# Análisis de funciones



**1.** Este gráfico muestra la temperatura en Purmamarca, en un día de invierno.




a. ¿Cuál fue la temperatura a las 14? ¿Y a las 5? ¿Y a las 6? ¿Y a las 8 de la noche?

b. Indicá dos momentos en los que la temperatura fue mayor a 0 °C y dos en los que fue menor.

c. ¿Hubo 14 °C en algún momento del día?




## Gráficos de relaciones entre variables

**2.** Respondé las preguntas con un compañero, usando el gráfico de la actividad 1.

a. ¿En qué momentos del día hizo 4 °C?

b. ¿Cuándo fue la temperatura máxima? ¿Y la mínima? ¿Cómo se dieron cuenta?

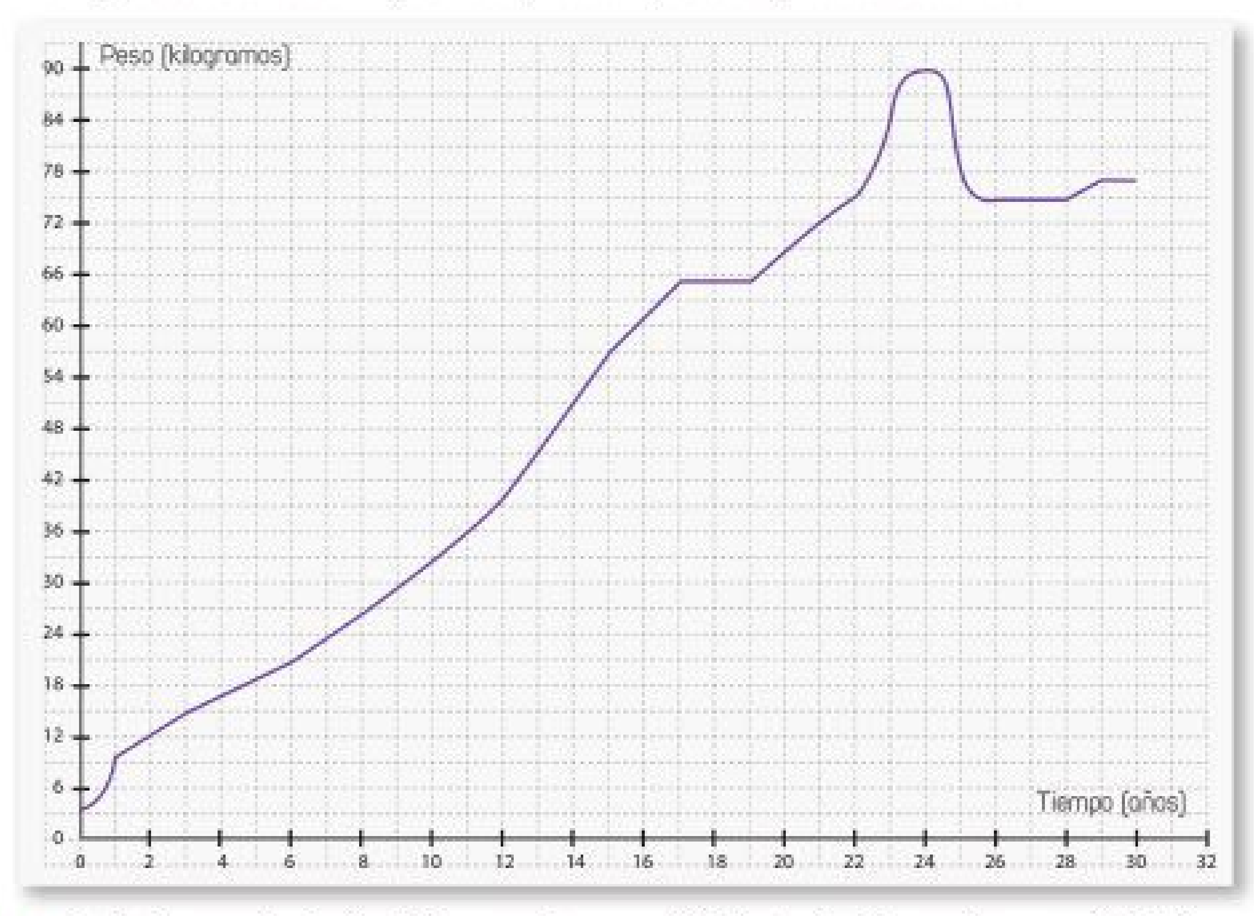
c. ¿Es cierto que la temperatura fue disminuyendo a partir de las 6 de la tarde?

d. Indiquen dos intervalos de tiempo en los que la temperatura aumentó y dos en los que disminuyó.

e. ¿Es cierto que la temperatura disminuyó más entre las 19 y las 21 que entre la 1 y las 3? Expliquen cómo se dan cuenta mirando el gráfico.

**3.** El siguiente gráfico muestra la variación del peso de Sebastián en función del tiempo, desde el día en que nació, hasta que cumplió treinta años.

Durante los primeros días de vida, los bebés suelen perder aproximadamente el 10% de su peso, pero lo recuperan rápidamente y por eso no se alcanza a distinguir en este gráfico.




a. ¿Cuánto pesaba Sebastián cuando cumplió 3 años? ¿Y cuando cumplió 17?

b. ¿Cuánto pesaba cuándo nació?

c. ¿Cuál fue el valor máximo que llegó a pesar? ¿A qué edad lo alcanzó?

d. ¿Es cierto que Sebastián aumentó más de peso en los primeros cinco años de vida que entre los 18 y los 23 años? ¿Cómo te das cuenta mirando el gráfico?

e. ¿Durante qué año Sebastián aumentó más de peso? ¿Y en cuál adelgazó más?

f. La forma del gráfico entre los 22 y 26 años es muy diferente a la forma que tiene el resto. ¿Qué sucedió en ese período con el peso de Sebastián?

g. Completá el gráfico hasta los 32 años, sabiendo que, cuando cumplió 32 años, Sebastián pesaba 69 kilogramos.

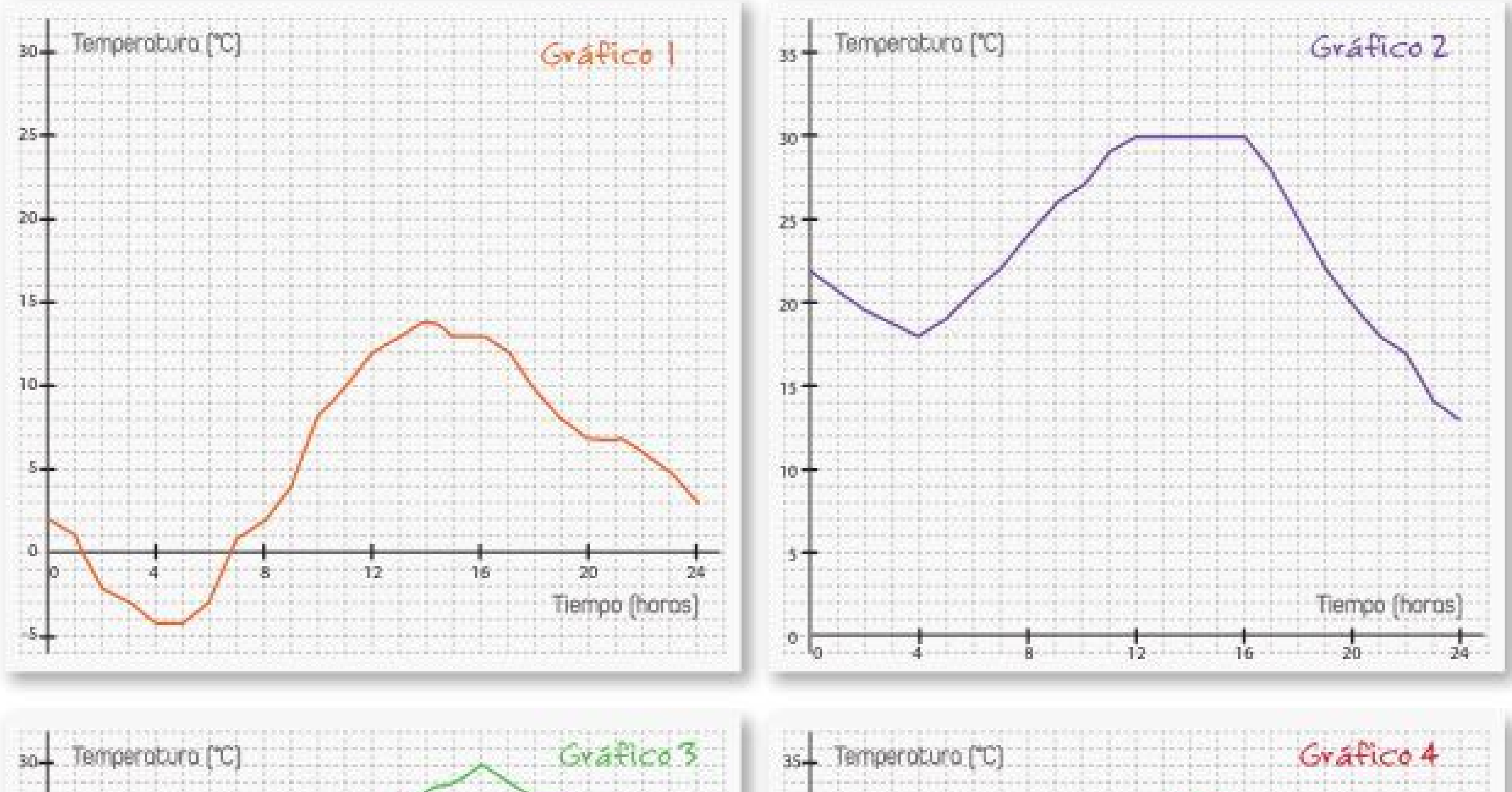
**4.** Tres amigos que viven en diferentes ciudades conversan sobre el clima del día de hoy. Resuelvan las consignas en parejas explicando cómo las pensaron.

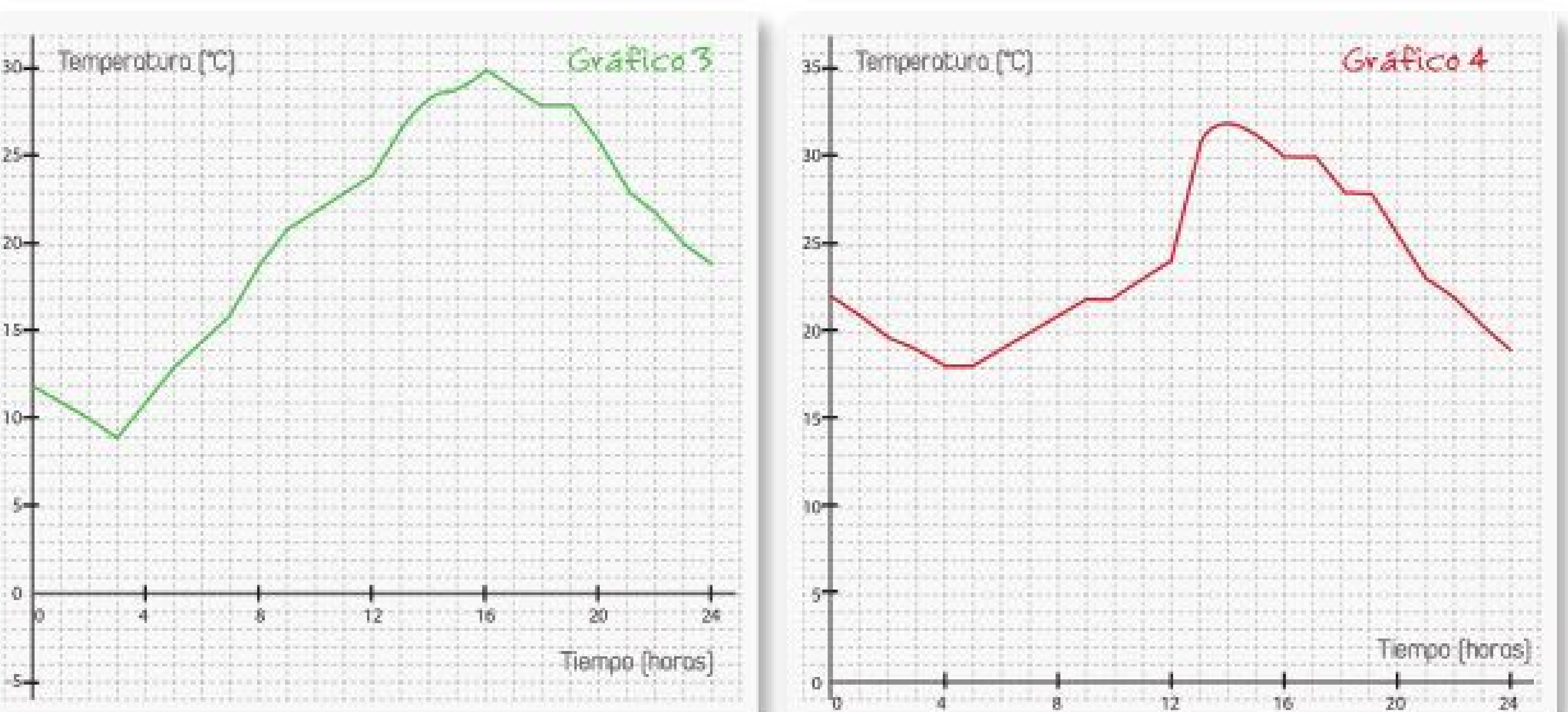
Me llamo Amadeo. A la mañana, cuando me desperté, hacía un calor tremendo. Cerca del mediodía, se nubló y la temperatura se mantuvo más o menos igual. A eso de las cinco, se largó la tormenta y me tuve que abrigar.

Soy Emilia. En mi ciudad siempre hace calor y hoy no fue la excepción. Amaneció nublado, pero al mediodía se despejó y en poco tiempo la temperatura aumentó casi diez grados. A la noche bajó un poco.

Mi nombre es Mara. La madrugada fue muy fría en mi ciudad. El sol salió temprano y enseguida empezó a aumentar la temperatura. Menos mal que salí para la escuela solo con un buzo, porque al mediodía estaba lindo y casi no sentí frío.

a. Decidan cuál de los gráficos podría representar la variación de la temperatura, en la ciudad de cada chico, en función del tiempo.




b. Inventen una descripción del clima para el gráfico que sobra.

## Tablas y gráficos

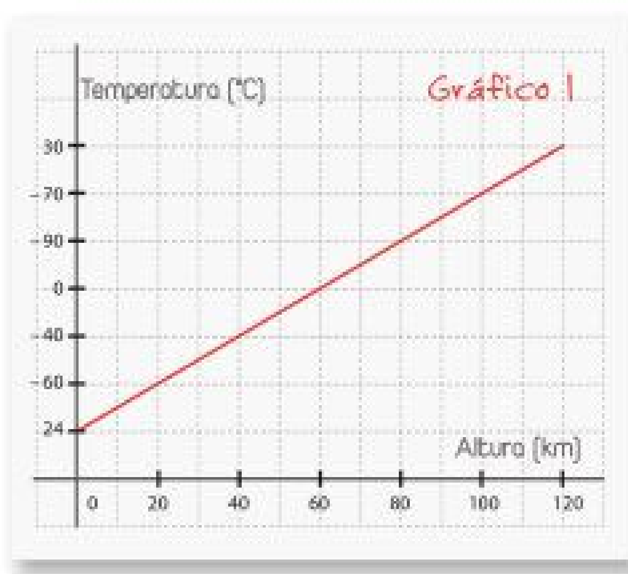
Un gráfico brinda información acerca de un fenómeno que se quiere estudiar, ya que muestra cómo varía una cantidad en relación con otra. Llamamos **variables** a estas dos cantidades. Por ejemplo:

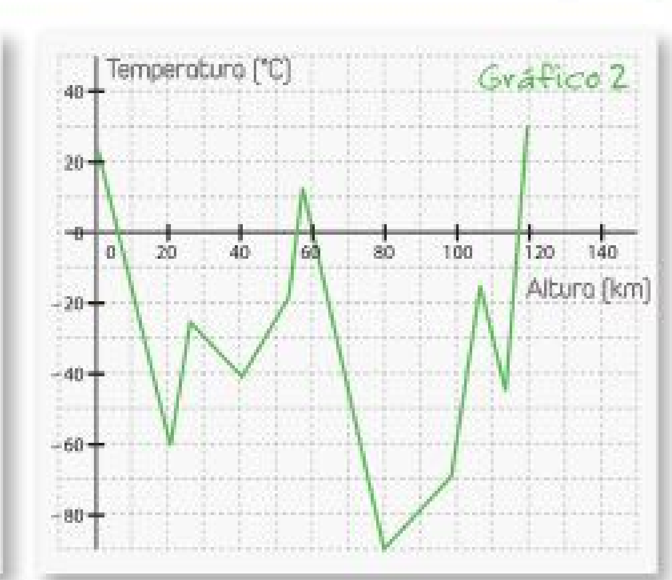
- En la actividad 1, el gráfico muestra cómo varía la temperatura (en °C) a medida que transcurre el tiempo (en horas). Como la temperatura depende del tiempo, la llamamos variable **dependiente**, y al tiempo, variable **independiente**.
- En la actividad 3, la variable dependiente es el peso de Sebastián (en kg) y la variable independiente es el tiempo transcurrido (en años). El gráfico muestra cómo varía el peso en función del tiempo.

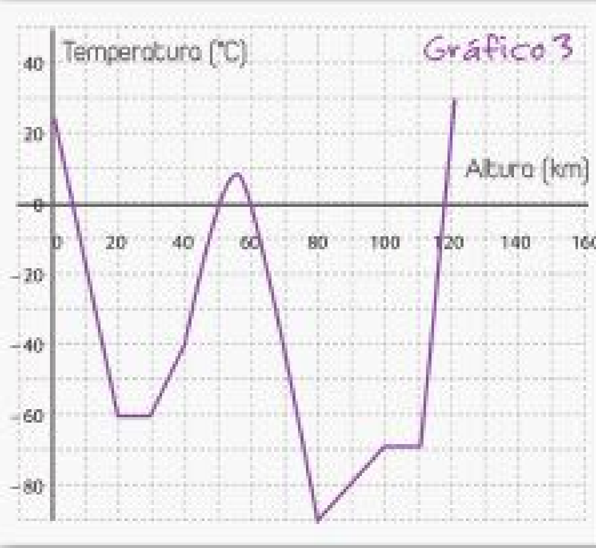
Los gráficos en los que se usan dos ejes perpendiculares para representar la relación entre dos variables se llaman **gráficos cartesianos**, en honor a René Descartes (1596 - 1650), matemático francés quien fue el primero en usarlos. Los ejes perpendiculares se llaman **ejes de coordenadas**.

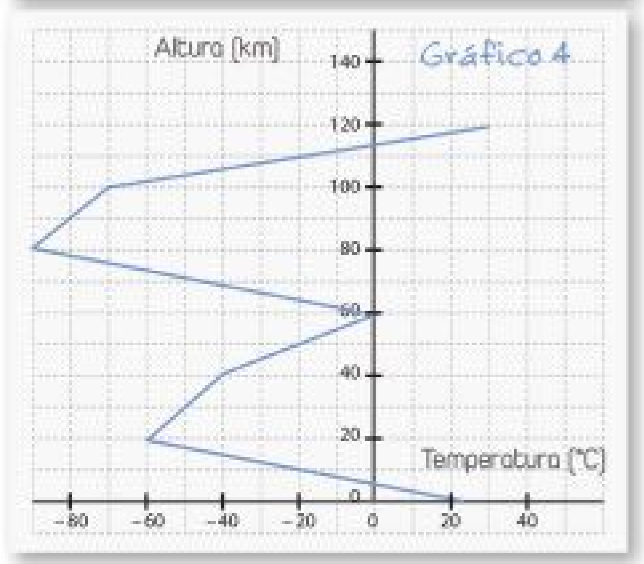
**5.** La temperatura de la atmósfera varía según la altura desde la superficie terrestre. Un grupo de científicos realizó un experimento y volcó la información obtenida en esta tabla. En grupos, indiquen cuáles de los siguientes gráficos pueden representar la variación de la temperatura de la atmósfera en función de la altura desde la superficie. Expliquen sus respuestas.

| Altura desde la superficie terrestre (en km) | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura de la atmósfera (en °C) | 24 | −60 | −40 | 0 | −90 | −70 | 30 |




La composición química de la atmósfera terrestre cambia según la altura respecto de la superficie terrestre y esto provoca, entre otras cosas, una variación en la temperatura. Por ejemplo, entre los kilómetros 12 y 60, la temperatura aumenta debido a que los rayos ultravioletas transforman el oxígeno en ozono, lo cual genera calor.

**6.** La siguiente tabla fue armada por otro grupo de científicos que hizo un experimento para medir la temperatura de la atmósfera del planeta Venus. Respondé las consignas justificando tus respuestas.

| Altura desde la superficie de Venus (en km) | 0 | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura de la atmósfera (en °C) | 500 | 200 | 0 | –100 | –80 | –50 | 5 |

a. ¿Cuál es la temperatura de la superficie de Venus?

..............................................................................................................

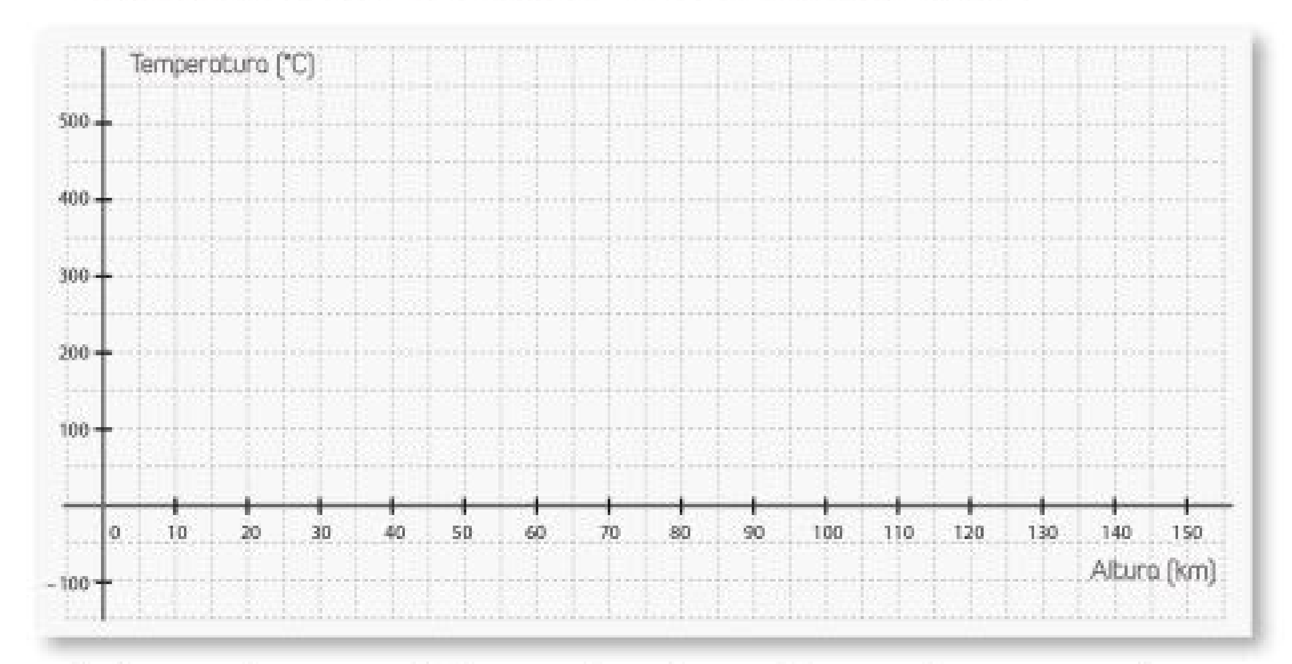
b. ¿Se puede saber cuál es la temperatura mínima de su atmósfera?

..............................................................................................................

c. ¿A qué altura desde la superficie la temperatura será de 0 °C?

..............................................................................................................

d. Usá estos ejes para hacer un gráfico que represente la variación de la temperatura de la atmósfera de Venus en función de la altura.

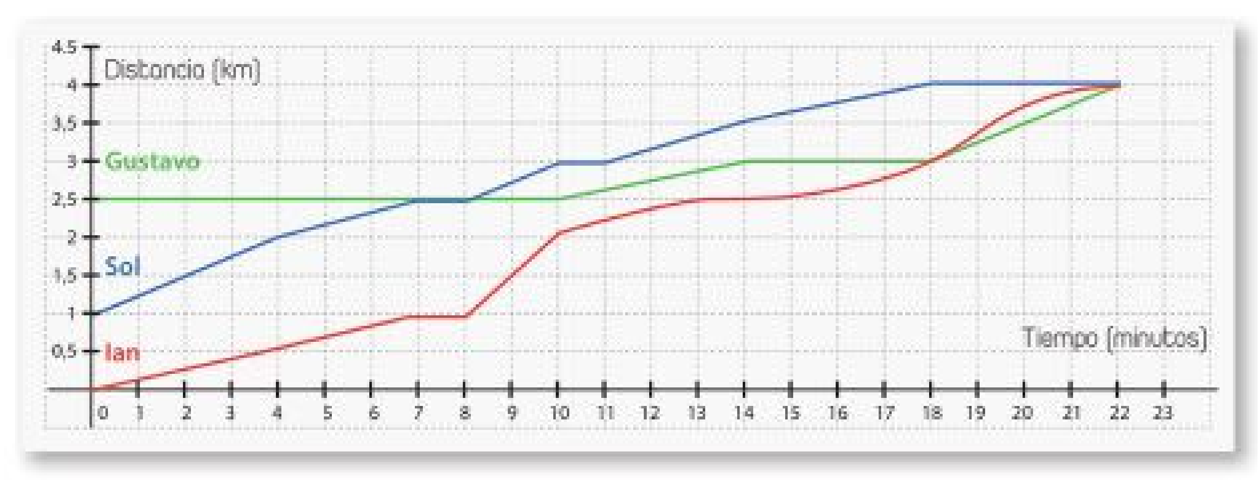



e. En tu carpeta, respondé de nuevo las primeras tres consignas, pero, esta vez, basándote en el gráfico que hiciste. Explicá qué parte del gráfico mirás para responder cada una.

Los gráficos se organizan a partir de dos ejes. El eje horizontal se llama **eje de las abscisas** o **eje *x***, y el eje vertical se llama **eje de las ordenadas** o **eje *y***. Algunas de sus características son:

- En la intersección de los ejes coordenados se ubica el valor 0 para las dos variables.
- Los valores ubicados en los ejes tienen que estar ordenados de izquierda a derecha en el eje *x*, y de abajo hacia arriba en el eje *y*. Por ejemplo, el gráfico 1 de la actividad 5 no cumple esta característica.
- Una vez elegido el segmento unidad en cada eje, este tiene que respetarse para todos los valores de ese eje.

7. Ian, Sol y Gustavo son tres amigos que viven sobre la misma calle. Un día arreglaron para ir en bicicleta a un parque que también está sobre esa calle. Los siguientes gráficos representan la distancia de cada amigo a la casa de Ian, en función del tiempo transcurrido desde el momento en que Ian salió de su casa hasta que llegó al parque. Contestá las preguntas con un compañero. Expliquen qué miran en el gráfico para contestar cada pregunta.




a. ¿Qué amigo vive más lejos del parque? ¿Y más cerca? ¿Cómo se dieron cuenta?

b. ¿Se puede saber quién salió más tarde? ¿Y quién llegó primero al parque?

c. Entre los minutos 8 y 10, ¿quién recorrió más distancia? ¿Y entre 10 y 12?

d. Los gráficos de Ian y de Gustavo se cortan en el punto (18 ; 3). ¿Qué pudo haber pasado?

e. ¿Cómo explicarían lo que hizo cada amigo entre los minutos 18 y 22?

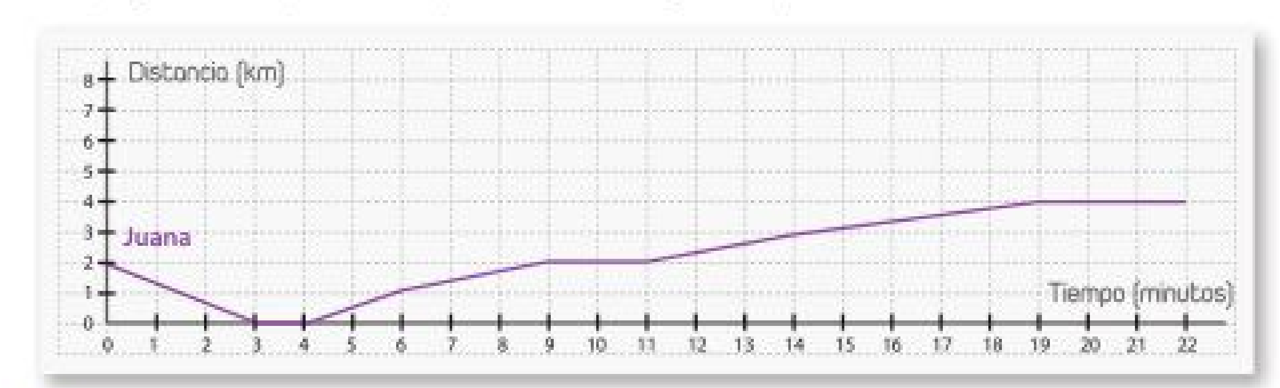
f. ¿Se puede saber en qué momentos Gustavo pedaleó más rápido?

g. Inventá una pregunta que se pueda contestar usando la información del gráfico, dásela a tu compañero y contestá la que recibiste.

Se usa la escritura (18 ; 3) para nombrar al punto del plano que tiene abscisa 18 y ordenada 3. Se dice que 18 y 3 son las **coordenadas** del punto.



8. Juana es otra amiga que vive en la misma calle que Ian, Gustavo y Sol; ella también va al parque en bicicleta. El gráfico de abajo muestra la distancia de Juana a la casa de Ian en función del tiempo transcurrido desde que Ian salió de su casa hasta que llegó al parque para encontrarse con sus amigos. Respondé las preguntas explicando qué mirás en el gráfico para contestarlas.

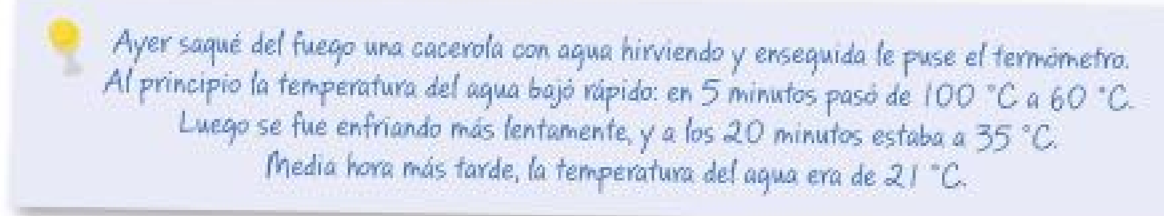



a. ¿Qué hizo Juana durante los primeros cuatro minutos?

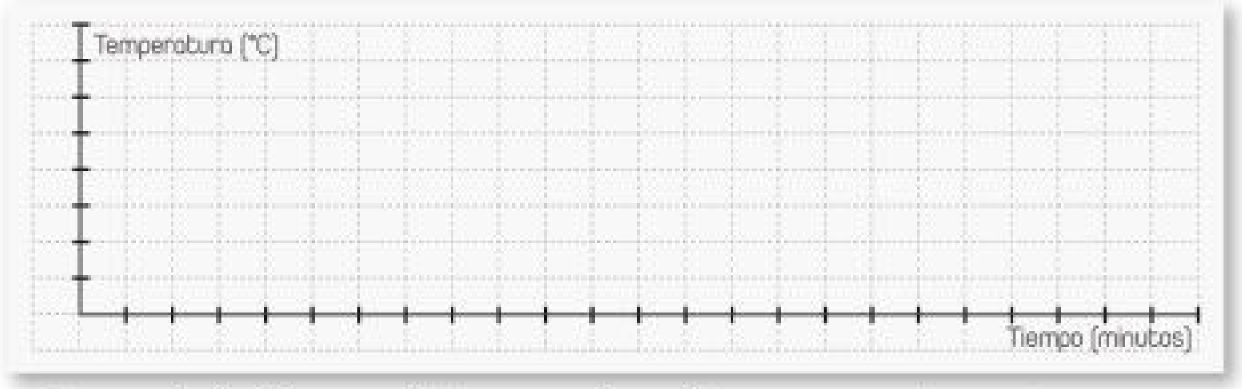
b. ¿Juana llegó al parque antes o después que Gustavo? ¿Llegó antes o después que Ian?

c. ¿En qué tramo del recorrido Juana pedaleó más rápido?

**9.** Belén hizo un experimento en su casa y lo escribió para la clase de Química.

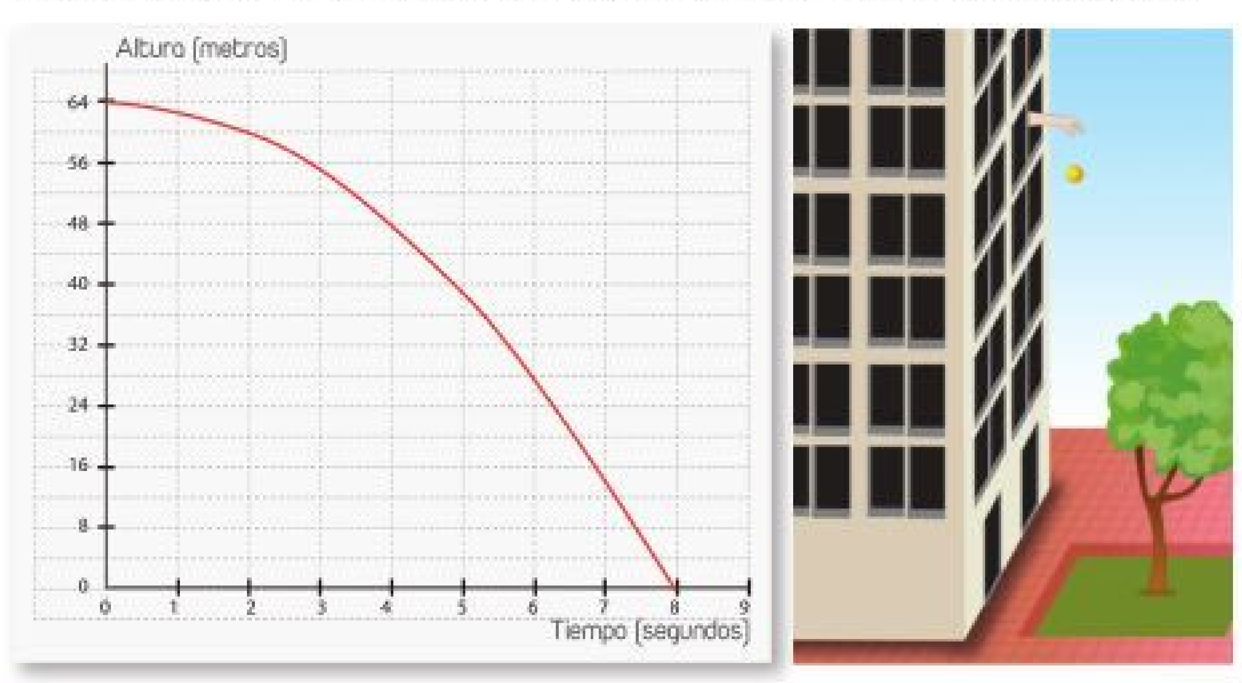

*Ayer saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo y enseguida le puse el termómetro. Al principio la temperatura del agua bajó rápido: en 5 minutos pasó de 100 °C a 60 °C. Luego se fue enfriando más lentamente, y a los 20 minutos estaba a 35 °C. Media hora más tarde, la temperatura del agua era de 21 °C.*

a. En estos ejes, hacé un gráfico de la temperatura del agua en función del tiempo.




b. Compará el gráfico que hiciste con el que hizo un compañero y piensen juntos cuáles son las diferencias y similitudes que hay entre ellos.

**10.** Para hacer un experimento físico se dejó caer verticalmente, desde la ventana de un edificio, una pelota de tenis provista de un dispositivo electrónico que permite conocer, en cada instante, la altura de la pelota, medida desde el piso. Con la información dada por el dispositivo, un programa de computadora realizó este gráfico, que relaciona la altura de la pelota en función del tiempo.




a. ¿A qué altura se encuentra la ventana desde donde se dejó caer la pelota?

b. ¿En qué momento pasó por una ventana que está 10 metros más abajo?

c. ¿Cuánto tiempo tardó la pelota en llegar al piso?

d. ¿Cuántos metros recorrió la pelota durante los primeros 2 segundos? ¿Y entre el cuarto y el sexto segundo?

e. ¿La pelota se desplazó siempre a la misma velocidad? Si la respuesta es negativa, ¿en qué momento fue más rápido? Explicá tu respuesta.

## Funciones y no funciones

**11.** Esta tabla registra el peso y la talla de los bebés nacidos el día 8 de abril de 2016 en una maternidad de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

| | Lola | Fede | Benja | Luca | Ámbar | Luz | José | León | Nina | Flor |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Talla (en cm) | 47 | 47,5 | 48 | 48 | 49 | 51 | 51,5 | 53 | 53 | 54 |
| Peso (en g) | 2.550 | 2.400 | 2.900 | 3.050 | 3.200 | 3.450 | 3.300 | 3.400 | 3.650 | 3.500 |

a. ¿Cuál fue el peso de Luca al nacer? ¿Qué bebé pesó menos al nacer?

b. ¿Cuál fue la talla de León? ¿Qué bebé midió menos?

c. Realizá en tu carpeta un gráfico cartesiano usando los valores de la tabla y ubicando la talla en el eje *x* y el peso en el eje *y*.

d. Si se sabe cuál fue la talla de uno de estos bebés al nacer, ¿se puede conocer su peso? ¿Cómo te das cuenta mirando el gráfico? ¿Y mirando la tabla?

En la actividad 11 observaron que no es posible saber el peso de un bebé conociendo solo su talla. El peso no queda determinado por la altura. Por ejemplo, Benja y Luca miden 48 cm, pero pesan distinto.
En las actividades anteriores ocurría algo diferente entre las variables. Por ejemplo, en la actividad 1, a cada valor del tiempo le correspondía un solo valor de la temperatura, es decir que la temperatura dependía del tiempo. Si en una relación entre dos variables, a cada valor de una le corresponde un único valor de la otra, esa relación se llama **función**.
En una función se llama **variable dependiente** a aquella que depende de la otra variable, y a esta se la llama **variable independiente**.
Por ejemplo, en la función de la actividad 5, la variable independiente es la altura desde la superficie terrestre (en km) y la variable dependiente es la temperatura de la atmósfera (en °C).
El conjunto de todos los valores que toma la variable independiente se denomina **dominio** de la función y el conjunto de todos los valores de la variable dependiente se llama **conjunto imagen**. Por ejemplo, en la actividad 10, el dominio son todos los números desde 0 hasta 8, ya que la pelota tocó el piso a los 8 segundos, mientras que el conjunto imagen son todos los números de 0 a 64, ya que la pelota empezó a caer a los 64 metros y llego hasta el piso, que corresponde a los 0 metros.

En un gráfico cartesiano, la variable independiente se representa en el eje horizontal y la variable dependiente, en el eje vertical.



**12.** Decidan en parejas si las siguientes relaciones entre variables son funciones o no.

a. La altura de los alumnos de tu escuela en función de su número de calzado.

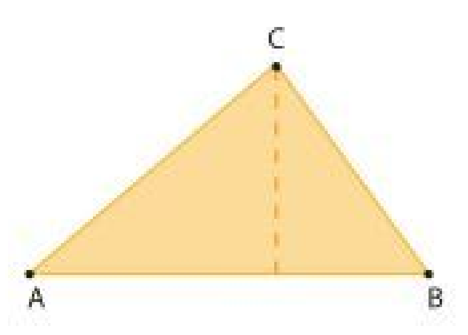
b. Tu altura en función del tiempo, desde que naciste hasta el día de hoy.

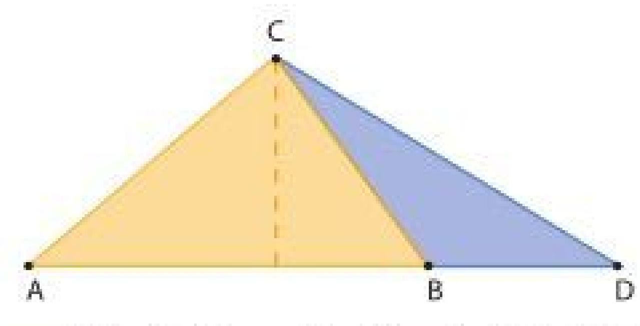
c. El área de un cuadrado en función de uno de sus lados.

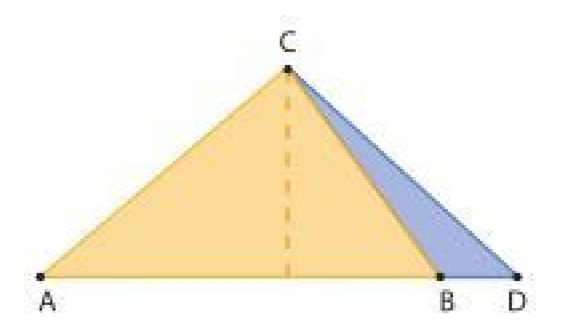
d. El área de un rectángulo en función de uno de sus lados.

# Funciones y áreas

**13.** En un triángulo ABC, el lado AB mide 10 cm y la altura correspondiente a ese lado mide 5 cm. Se quieren construir otros triángulos ADC, agregando un segmento BD a la base y conservando la misma altura. Estos son dos ejemplos de los triángulos ADC que se quieren construir.




a. Calculá el área del triángulo ADC si $\overline{BD}$ mide 3 cm.

b. Completá la siguiente tabla y anotá las cuentas que hiciste.

| Longitud del segmento BD (en cm) | 0,5 | 1 | 3 | 5 | | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Área del triángulo ADC (en cm²) | | | | | 50 | |

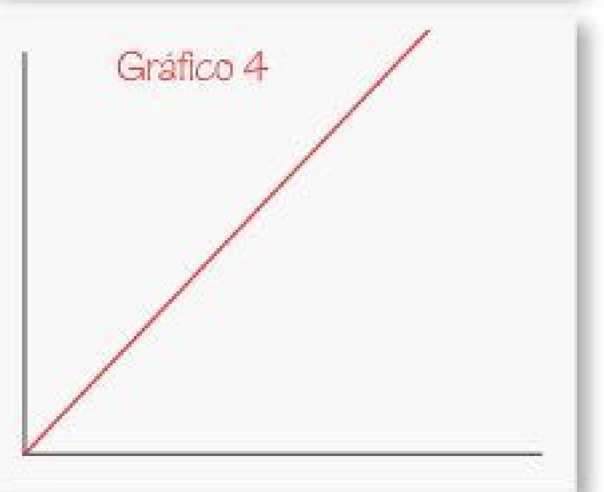
c. Decidan en parejas si alguno de los siguientes gráficos podría representar el área del triángulo ADC en función de la longitud del segmento BD. Expliquen por qué aceptarían o descartarían cada gráfico.



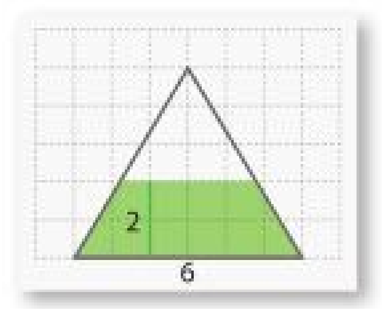


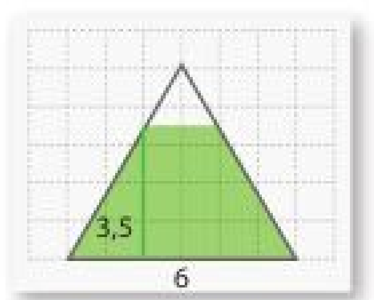


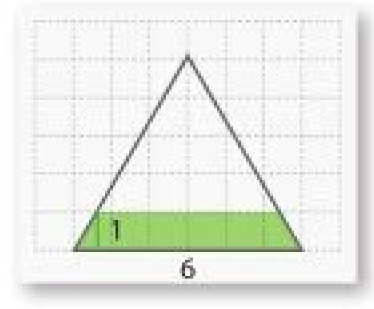


**14.** Se tiene un triángulo isósceles con el lado desigual de 6 unidades y con la altura correspondiente a ese lado de 5 unidades. Dentro de ese triángulo se construyen trapecios, como los siguientes. Resuelvan las consignas en grupo.




a. Consideren como unidad de área a un cuadradito y como unidad de longitud al lado del cuadradito. Decidan si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen sus decisiones.

- Si la altura del trapecio es 1, su área es más de 4.

.................................................................................................

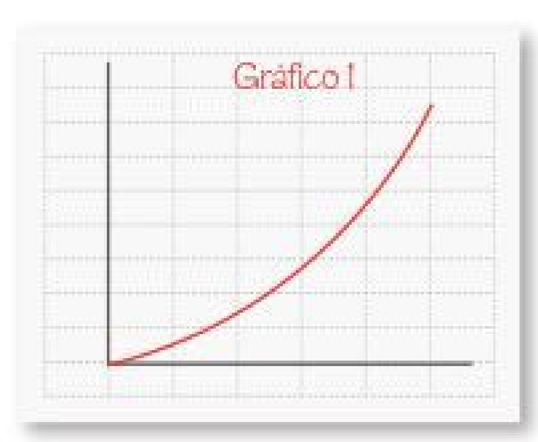
- Si la altura del trapecio es 2, su área es 12.

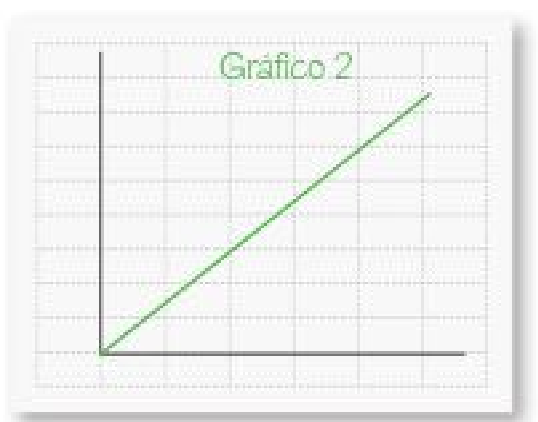
.................................................................................................

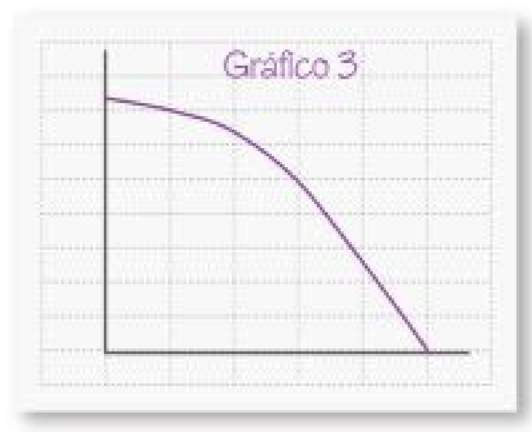
- Si la altura del trapecio es 3, su área es menor que 16.

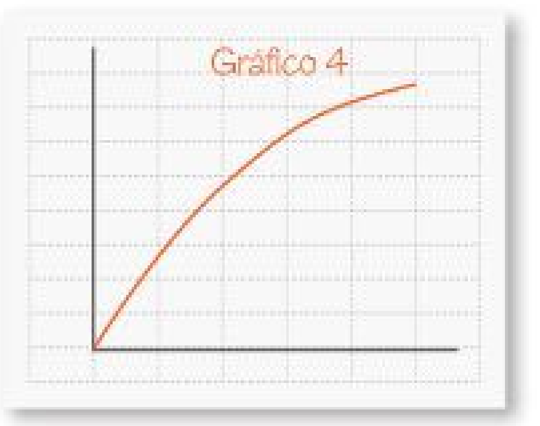
.................................................................................................

b. Estudien la variación del área del trapecio en función de su altura. Para cada uno de los siguientes gráficos decidan si puede ser o no el gráfico de esa función. Justifiquen sus decisiones.



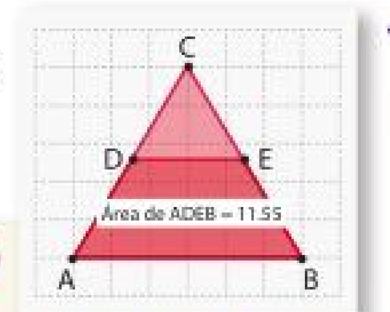




.................................................................................................

.................................................................................................

**15.** a. En parejas, sigan las instrucciones para construir los trapecios de la actividad anterior usando el programa GeoGebra. Entre paréntesis están indicados los nombres que el programa le da a cada objeto.




1. Definir el punto A = (0,0) en la barra de entrada. Luego definir los puntos B = (6,0) y C = (3,5).
2. Seleccionar la herramienta Polígono y marcar los tres puntos A, B y C, y nuevamente el punto A, para cerrar el triángulo ABC.
3. Usar la herramienta Punto para definir un nuevo punto (D) sobre el lado AC del triángulo.
4. Con la herramienta Recta paralela hacer clic en el punto D y después sobre el lado AB para construir la recta paralela al lado AB que pasa por D.
5. Definir otro punto (E) en la intersección entre la recta que construyeron y el lado BC del triángulo.
6. Elegir la herramienta Polígono, hacer clic en los puntos A, D, E y B, y nuevamente en A, para cerrar el trapecio ADEB.
7. Seleccionar la herramienta Área y hacer clic en el interior del trapecio ADEB.
8. Elegir la herramienta Elije y mueve, hacer clic con el botón derecho sobre la vista gráfica y seleccionar la opción Cuadrícula.

Para ingresar un nuevo punto en GeoGebra tienen que escribir, en la barra de entrada, sus coordenadas entre paréntesis y separadas por una coma. Por ejemplo, para ingresar el punto (2 ; 4) hay que escribir (2,4).
Para escribir un número decimal tienen que poner un punto en vez de una coma. Por ejemplo, 8,4 se escribe 8.4.

b. Moviendo el punto D, verifiquen las respuestas que dieron en la actividad 14. Para ver la altura del trapecio, pueden usar la recta paralela que construyeron y su intersección con el eje vertical de la vista gráfica.

..........

..........

c. Usen la información que brinda la construcción que hicieron en GeoGebra para completar la siguiente tabla.

| Altura del trapecio ADEB | 0 | 1 | | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Área del trapecio ADEB | | | 8 | | | 15 |

d. En el mismo archivo donde construyeron el trapecio dinámico, abran la Vista Gráfica 2, seleccionándola en el menú Vista. En esa ventana, ingresen los puntos del gráfico de la función que corresponden a la tabla anterior. Es probable que para ver todos los puntos tengan que cambiar la escala del eje vertical. Para hacerlo, seleccionen la herramienta "Desplaza vista gráfica", hagan clic sobre el eje vertical y, sin soltar el botón del mouse, arrástrenlo. Con esta nueva información, revisen lo que contestaron en la segunda consigna de la actividad 14. ¿Cambiarían su respuesta?

..........

e. En la Vista Gráfica 2, definan el punto P = (y(D), polígono2). Al ir moviendo el punto D, el punto P cambia de posición porque la abscisa del punto es la altura del trapecio y la ordenada es su área. Luego, activen el rastro de P. Comparen el gráfico que genera P con sus respuestas a la consigna anterior.

..........

Para definir el punto P = (y(D), polígono2) en la Vista Gráfica 2, tienen que seleccionar dicha vista y escribir en la barra de entrada las coordenadas del punto, respetando las mayúsculas y la tilde.
Para activar el rastro del punto, tienen que hacer clic sobre el punto P con el botón derecho del mouse y elegir la opción "Rastro".

**16.** a. En grupos, construyan otro trapecio dinámico usando el programa GeoGebra.




1. En la barra de entrada definir los puntos: A = (2,0), B = (3,0), C = (0,5) y D = (5,5).
2. Seleccionar la herramienta Polígono y luego marcar los puntos A, B, D y C, y nuevamente el punto A, para cerrar el trapecio ABDC.
3. Con la herramienta Punto definir un nuevo punto (E) sobre el lado AC del trapecio.
4. Elegir la herramienta Recta paralela y hacer clic en el punto E y luego sobre el lado AB para construir la recta paralela al lado AB que pasa por E.
5. Con la herramienta Punto, definir un nuevo punto (F) en la intersección entre la recta construida y el lado BD.
6. Seleccionar la herramienta Polígono y luego marcar los puntos A, E, F y B, y nuevamente el punto A, para cerrar el trapecio AEFB.
7. Elegir la herramienta Área y hacer clic sobre el interior del trapecio AEFB.
8. Elegir la herramienta Elije y mueve, hacer clic con el botón derecho sobre la vista gráfica y seleccionar la opción Cuadrícula.

b. Usen la información que brinda la construcción que hicieron en GeoGebra para completar la siguiente tabla.

| Altura del trapecio ADFB | 1 | 2 | 3 | 3,5 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Área del trapecio ADFB | | | | | | 15 |

c. A partir de los datos de la tabla confeccionen, en la carpeta o en el archivo de GeoGebra, un gráfico cartesiano para la función que relaciona la altura del trapecio AEFB con su área.

d. A partir de la tabla puede observarse que la función no crece lo mismo entre 1 y 2 que entre 2 y 3. ¿Cómo puede verse eso en el gráfico cartesiano?

.......................................................................................................

.......................................................................................................

e. ¿Cómo lo explicarían a partir de la forma de la figura?

.......................................................................................................

.......................................................................................................

f. Al comparar la forma del gráfico que hicieron en la segunda consigna con la del gráfico de la actividad 15, se observan diferencias. Explíquenlas considerando la forma de las dos figuras dinámicas.

.......................................................................................................

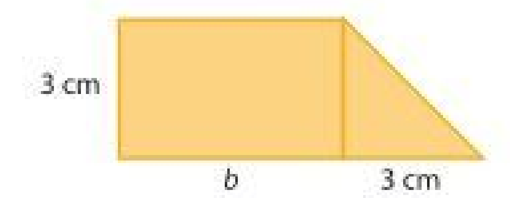
.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

## Funciones, gráficos y fórmulas

**17.** En la actividad 11 de la página 47, correspondiente al capítulo 3, estudiaron el área y el perímetro de cuadriláteros formados por un rectángulo y un triángulo isósceles. La altura de los rectángulos mide siempre 3 cm y la medida de la base es variable, y la nombramos con la letra *b*. En grupos, resuelvan las siguientes consignas en la carpeta para estudiar cómo varía el área del cuadrilátero en función de *b*.




a. Completen la siguiente tabla y anoten las cuentas que hicieron.

| *b* (en cm) | 0,5 | 1,5 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A = Área del cuadrilátero (en cm²) | | | | | |

b. Escriban una fórmula que permita calcular el área del cuadrilátero (A) para cualquier valor de *b*.

c. Realicen un gráfico cartesiano de la variación de A en función de *b*. También pueden hacerlo usando GeoGebra; tienen que introducir la fórmula de A en la barra de entrada.

d. ¿Es verdad que para $b = 7,5$, A vale 27? ¿Cómo se dan cuenta mirando el gráfico? ¿Y usando la fórmula?

e. ¿Para qué valor de *b* el área será igual a 18 cm²? Expliquen su respuesta usando la fórmula y el gráfico.

f. ¿Por qué el gráfico de la función no pasa por (0 ; 0)? ¿Cómo se pueden dar cuenta usando la fórmula de A?

g. Usen la fórmula para hallar en qué punto el gráfico corta al eje *y*. ¿A qué polígono corresponde ese punto?

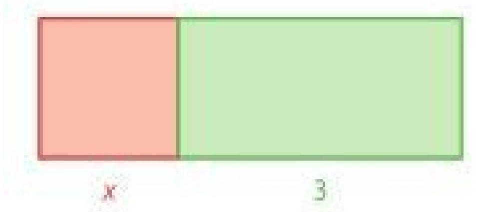
Si realizan el gráfico en GeoGebra, introduciendo la fórmula, verán que aparece una porción de gráfico sobre los valores negativos del eje horizontal. Si bien ese es el gráfico que corresponde a la fórmula, los puntos con abscisa negativa no corresponden a la función A que están estudiando, ya que la longitud *b* correspondiente a la base del rectángulo no toma valores negativos.

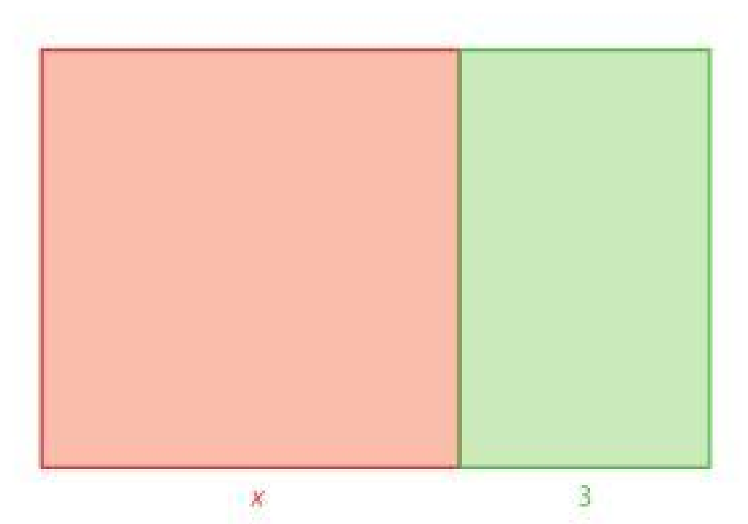
En la actividad 17, una fórmula que permite calcular el área del cuadrilátero en función de *b*, la medida de la base del rectángulo (en cm), es: $A = 4,5 + 3 \cdot b$.
Para reflejar que A depende del valor de *b*, se usa la escritura:

$$A(b) = 4,5 + 3 \cdot b.$$

Se puede usar la fórmula para calcular cuánto vale la función para un cierto valor de la variable independiente; por ejemplo, para $b = 8,5$, hay que hacer $4,5 + 3 \cdot 8,5 = 30$. Se expresa $A(8,5) = 30$ y se lee "la imagen de 8,5 es 30". Esto significa que cuando *b* mide 8,5 cm, el área del cuadrilátero mide 30 cm².

**18.** Considerá las figuras compuestas por un cuadrado de lado variable $x$ al cual se le agregó un rectángulo de base 3, como lo muestran los ejemplos. Estudiá la variación del área de las figuras en función de $x$, llamando S($x$) a dicha función.




a. Calculá S(1), S(3,5) y S(6).

b. Decidí cuáles de las siguientes fórmulas sirven para calcular S($x$).

$S(x) = x + x + 3\,x$     $S(x) = (3 + x) \cdot x$

$S(x) = x^2 + 3 + x$     $S(x) = x^2 + 3 \cdot x$

c. Usá una fórmula que consideres correcta para calcular S(12,5) y S(368).

d. Usá GeoGebra para dibujar el gráfico cartesiano de S, introduciendo su fórmula en la barra de entrada.

e. ¿Por qué el gráfico de S pasa por (0 ; 0)? Explicalo apoyándote en las figuras y la fórmula.

f. Usando el gráfico, encontrá el valor aproximado de S(10) y de S(2,5). Usá la fórmula para comprobar los resultados obtenidos.

g. Releé tu respuesta a la primera consigna y comprobá que, entre 1 y 3,5, la función S no crece lo mismo que entre 3,5 y 6. ¿Cómo lo podés comprobar en el gráfico?

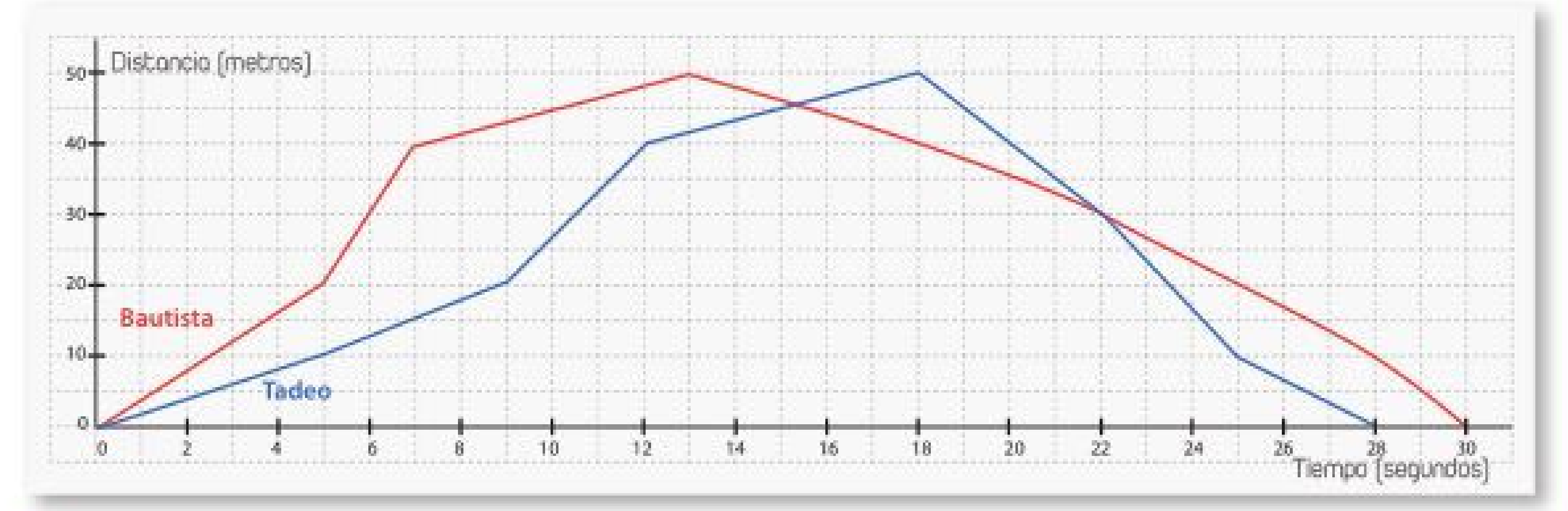
Tal como sucede en la actividad 17, al realizar el gráfico en GeoGebra introduciendo la fórmula, aparece una sección de curva sobre los valores negativos de $x$. Esa sección del gráfico corresponde a la fórmula, pero para valores negativos de $x$, no corresponde a la función S($x$) que estás estudiando.

**19.** Consideren la función A($b$) de la actividad 17. Analicen si la siguiente afirmación es verdadera. Justifiquen su decisión usando el gráfico cartesiano de A.

*Entre* b = *1 y* b = *3, la función A crece lo mismo que entre* b = *4 y* b = *6.*

Para buscar el valor de $x$ en el cual S($x$) vale 6, podés ayudarte trazando rectas paralelas y perpendiculares en la vista gráfica del archivo de GeoGebra.

**1.** Tadeo y Bautista jugaron una carrera durante una clase de Educación física. Cada uno corrió por uno de los laterales de la cancha de fútbol y ganó el que, luego de haber llegado hasta el fondo, regresó primero al punto de partida. El siguiente gráfico muestra la distancia de cada amigo al punto de partida en función del tiempo.



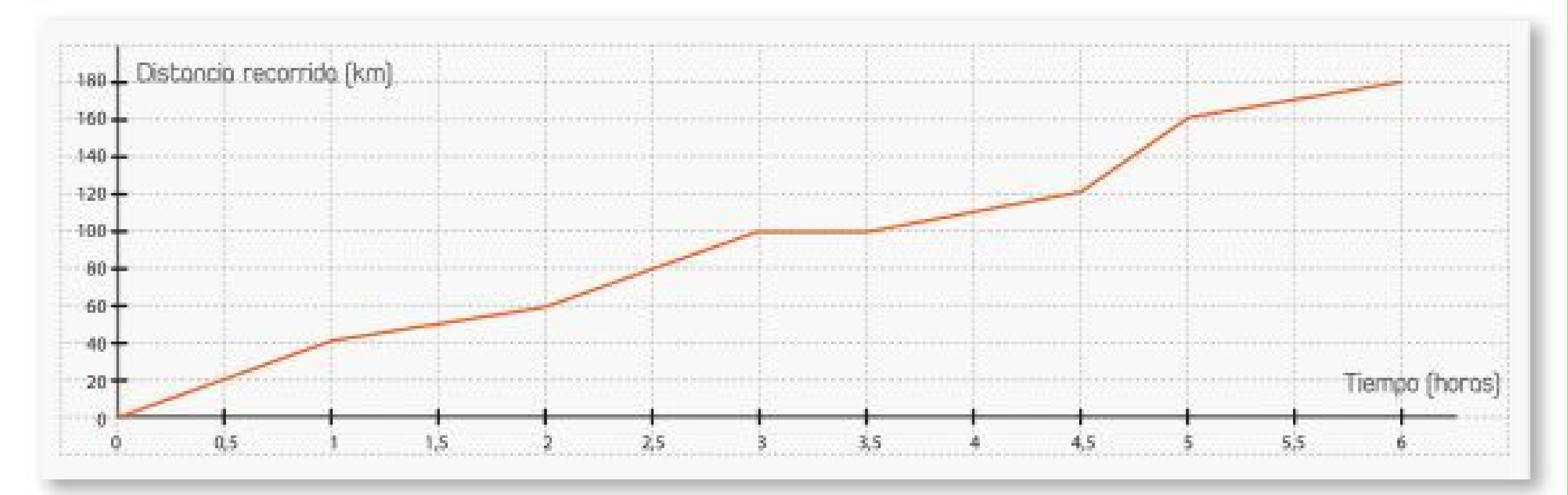

a. ¿A qué distancia del punto de partida estaba cada amigo a los 5 segundos?

b. ¿En qué momentos Bautista estuvo a 40 metros de la salida? ¿Y a 30 metros?

c. ¿En qué momento Tadeo estuvo más lejos del punto de partida?

d. ¿Quién ganó la carrera?

**2.** El domingo pasado a las 10, Mariano comenzó una carrera en bicicleta. El siguiente gráfico muestra la distancia recorrida por Mariano en función del tiempo, desde que empezó la carrera hasta que llegó a la meta. Respondé las consignas en tu carpeta.




a. ¿De cuántos kilómetros era la carrera?

b. ¿Cuánto tiempo tardó Mariano desde que salió hasta que llegó a la meta?

c. ¿A qué hora llegó a la mitad del recorrido?

d. ¿Cuántos kilómetros recorrió Mariano entre las 13 y las 13:30? ¿Y entre las 13:30 y las 14:30?

e. ¿Durante el transcurso de qué hora recorrió más distancia?




**3.** La profesora de Biología midió, cada 5 minutos, la temperatura de una sustancia durante un proceso químico y armó esta tabla.

| Tiempo (en minutos) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura (en °C) | −5 | 5 | 12 | 30 | 45 | 40 | 30 | 22,5 |

a. ¿Cuál era la temperatura de la sustancia cuando empezó a medir?

.................................................................................................................................

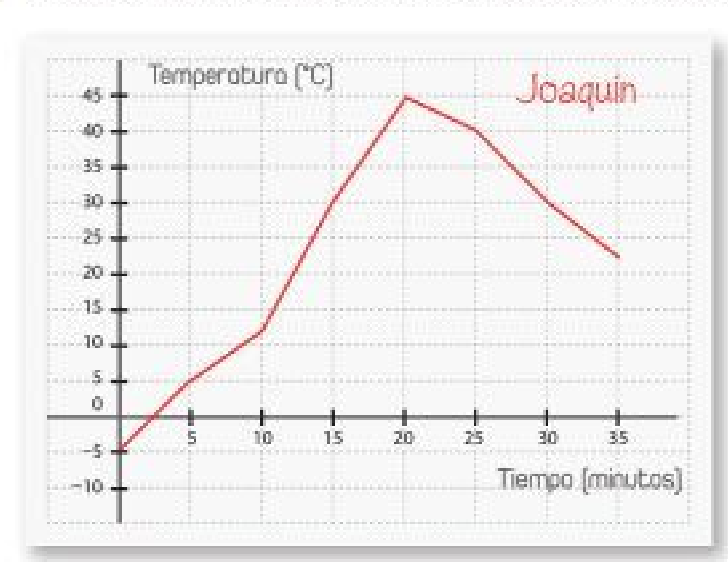
b. ¿Cuál fue la máxima temperatura que midió y en qué momento realizó esa medición?

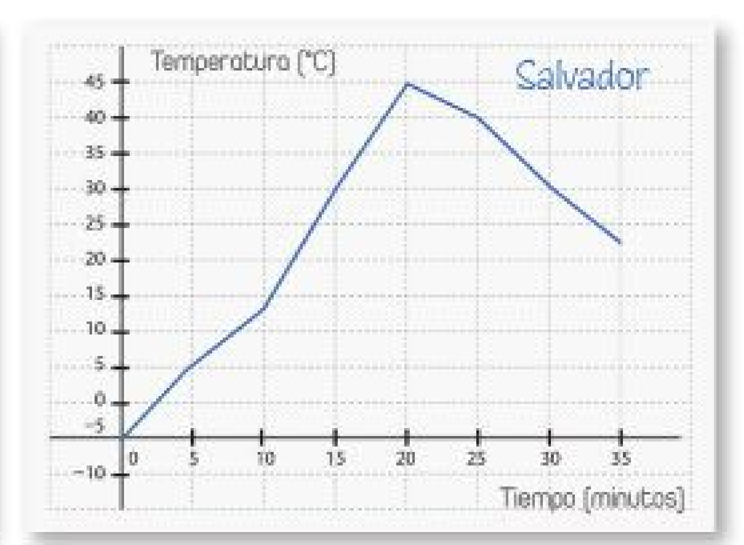
.................................................................................................................................

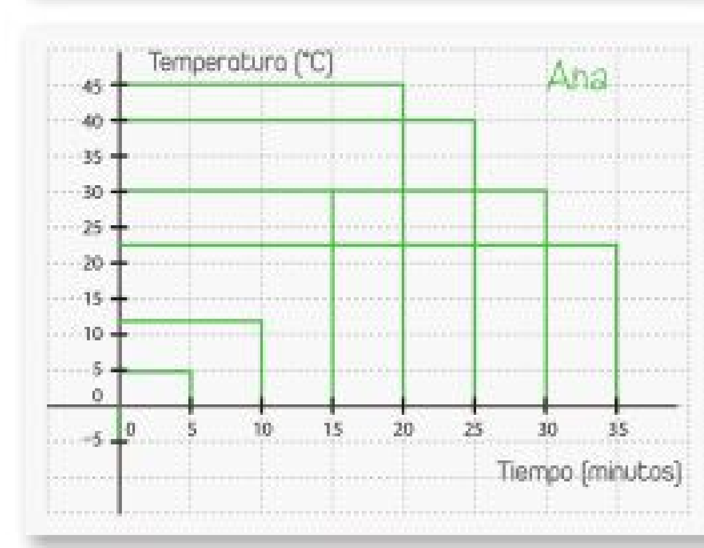
c. ¿En qué intervalo de 5 minutos la temperatura creció más?

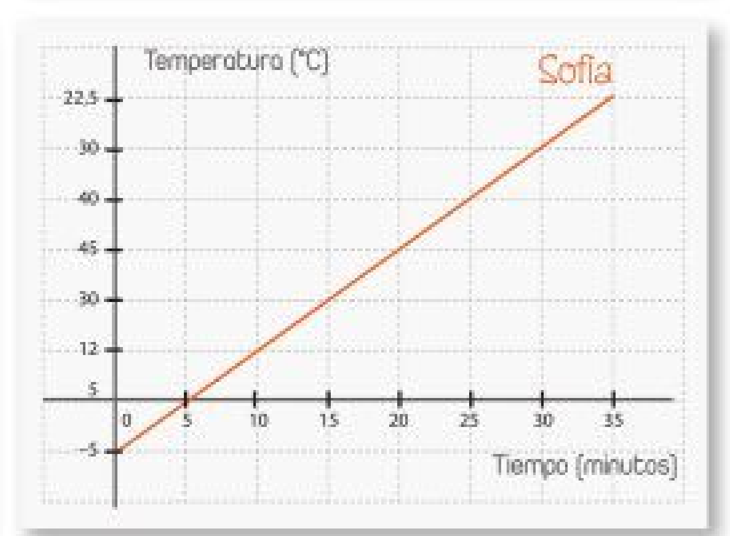
.................................................................................................................................

**4.** Cuatro alumnos hicieron estos gráficos usando los datos de la tabla anterior.




a. ¿En todos los gráficos se puede leer la información de la tabla?

.................................................................................................................................

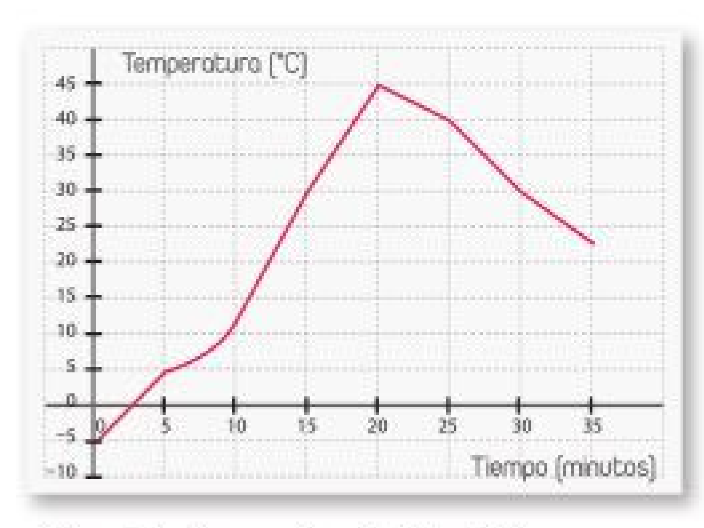
b. ¿Cuáles te parece que son más útiles para responder las preguntas de la actividad 3? ¿Por qué?

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

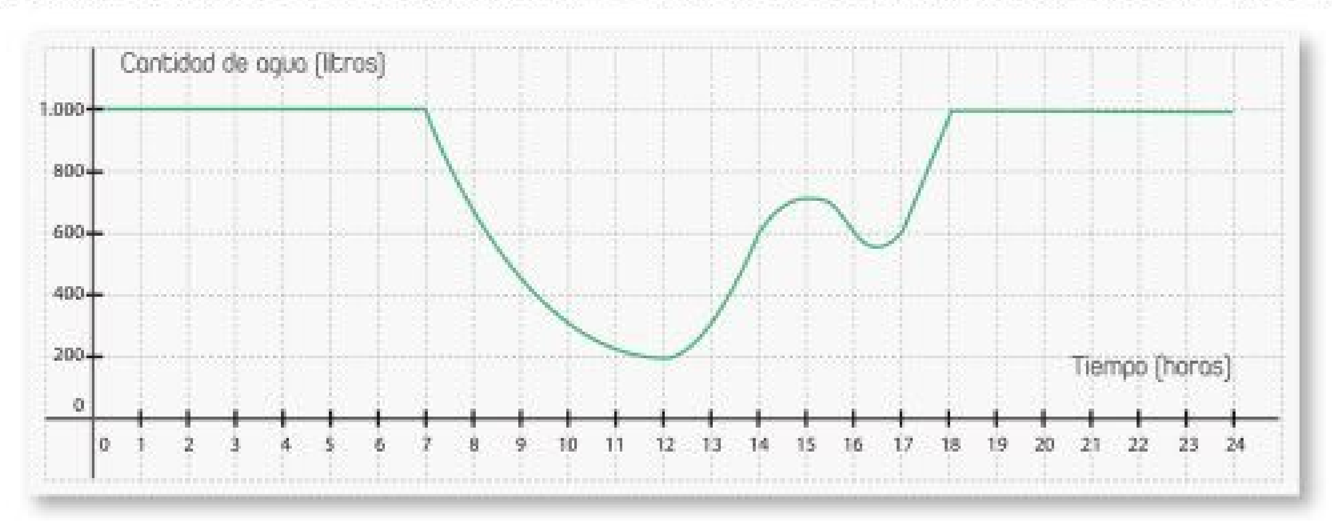
**5.** Lucía hizo este gráfico, usando la información de la tabla de la actividad 3 de la página anterior.




a. ¿Se puede leer en este gráfico la información de la tabla?

b. Lucía y Joaquín unieron los puntos entre los 5 y los 10 minutos de distinto modo. ¿A qué se puede deber esta diferencia entre los dos gráficos?

**6.** Este gráfico representa la cantidad de agua en función del tiempo que había el 12 de abril de 2016 en el tanque de una escuela de la ciudad de Córdoba. La capacidad del tanque es de 1.000 litros.




a. ¿En qué momentos del día el consumo de agua fue nulo?

b. ¿Cuántos litros de agua tenía el tanque a las 7? ¿Y a las 16?

c. ¿A qué hora el tanque tuvo 600 litros de agua? ¿Y 400 litros?

d. ¿En qué momento el tanque estuvo lleno? ¿Y vacío?

e. Analizando el gráfico, ¿se puede suponer a qué hora empiezan las actividades en la escuela? ¿Y cuándo terminan?

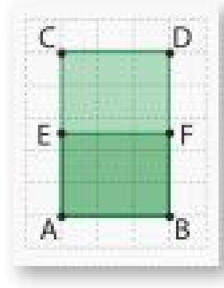


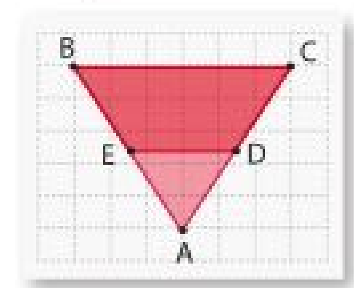

**7.** Martín trabaja como cadete en una oficina ubicada en la calle Pellegrini de Santa Rosa, La Pampa. Un día, a las diez en punto de la mañana, salió a hacer algunos trámites por la zona. Primero caminó hasta la librería que hay en la esquina de la oficina y sacó varias fotocopias de un contrato de alquiler. Después fue hasta la escribanía, ubicada también sobre la calle Pellegrini, a 150 metros de la oficina y, luego de esperar unos minutos, le dejó una copia del contrato al escribano. De regreso a la oficina, entró en un kiosco y compró las bebidas que le habían encargado sus compañeros. Martín llegó a la oficina a las 11:30.

a. En la carpeta, hacé un gráfico que represente la distancia de Martín a la oficina en función del tiempo, desde que salió esa mañana hasta que regresó, una hora y media después.

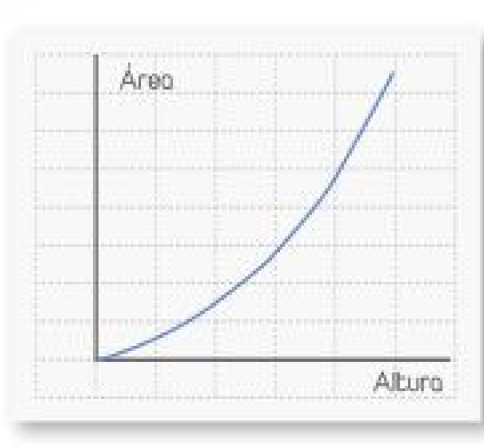
b. Compará el gráfico que hiciste con el de un compañero.

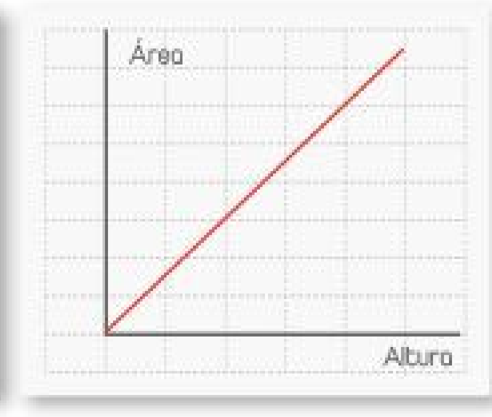
**8.** En el rectángulo ACDB se construyó el rectángulo dinámico AEFB. En el triángulo ABC se construyó un triángulo dinámico AED. Resolvé las consignas en tu carpeta.

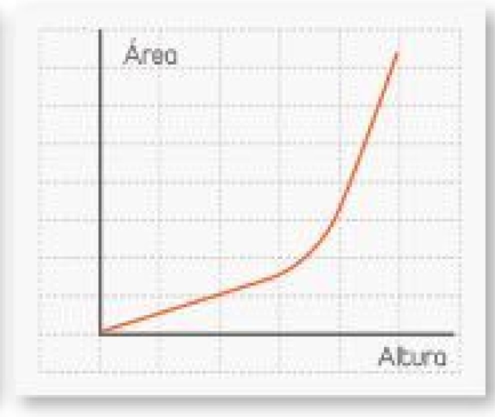



a. Indicá a qué figura corresponde cada gráfico de la variación del área en función de la altura.




b. En la carpeta, diseñá una figura cuyo gráfico de la variación del área en función de la altura sea como el gráfico que quedó sin elegir en la consigna anterior.

**9.** a. Escribí una fórmula para la función de la actividad 13 de la página 56.

b. Realizá el gráfico de la función con GeoGebra, usando la fórmula que escribiste.

c. Usá el gráfico obtenido para revisar tu respuesta a la última consigna de la actividad 13.

d. ¿En qué punto el gráfico corta al eje *y*? ¿Cómo podés verificarlo usando la fórmula?

e. Para los valores de *x* negativos, la fórmula ya no representa el área de los triángulos, pero en el gráfico cartesiano aparecen los puntos correspondientes a esos valores de acuerdo con la fórmula. ¿En qué punto el gráfico corta al eje *x*? ¿Cómo podés verificarlo usando la fórmula?

f. Si se tratara de la misma situación, pero con triángulos de altura 7, ¿cómo cambiaría la fórmula? ¿Y el gráfico?

g. Y si el primer triángulo tuviera base 6 en vez de 10 y la altura de todos siguiera siendo 5, ¿cómo cambiaría la fórmula? ¿Y el gráfico?




Número racionales: operaciones, expresiones decimales finitas y periódicas, orden, recta numérica, densidad, números irracionales. Expresiones algebraicas y ecuaciones.

# Números racionales

1. Lili quiere comparar la capacidad de una jarra con la de un vaso; para eso empieza a llenar la jarra con el vaso. Vuelca dos veces el vaso completo y cuando está volcándolo por tercera vez, se llena completamente la jarra. Sin tirar lo que le queda en el vaso, vacía la jarra y vuelca ahí lo que queda del tercer vaso. Sigue llenado la jarra con el vaso. Finalmente, completa 3 jarras usando 7 vasos. De este modo, Lili establece: "3 jarras se llenan exactamente con 7 vasos de agua".

   a. Con solo un vaso de agua, ¿qué parte de la jarra se llena?

   ..........................................................................................

   b. Cuando Lili vertió dos vasos en la primera jarra, ¿qué parte de la jarra se había llenado?

   ..........................................................................................

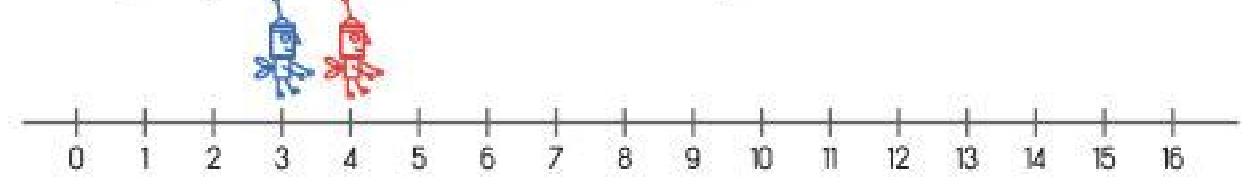
   c. En el procedimiento de Lili, ella volcó en la jarra, que ya estaba vacía, lo que quedaba en el tercer vaso. ¿Qué parte de la jarra se habrá llenado con el agua que había en el vaso?

   ..........................................................................................




## Suma y resta

**2.** Dos robots que caminan dando, cada uno, pasos de la misma longitud se colocan en un camino numerado como el siguiente. El robot rojo va del 4 al 5 con 3 pasos y el robot azul va del 3 al 8 con 4 pasos.




a. Si los dos robots salen del 0, ¿en qué número de la recta se detiene cada uno al dar solo un paso?

.............................................................................................................

b. ¿Cuál es la longitud del paso de cada robot? ...........................................

c. Si primero sale desde el 0 el robot azul y da dos pasos, luego se cambia ese robot por el rojo y da un solo paso, ¿qué número de la recta pisará?

.............................................................................................................



**3.** a. ¿Es posible sumar un número racional a 12,6 para obtener como resultado 11?

b. ¿Es posible restarle un número racional a $\frac{6}{15}$ para obtener como resultado 2?

Para resolver la actividad anterior es necesario recordar lo siguiente.
- Sumar un número racional negativo es equivalente a restar su opuesto. Por ejemplo: $\frac{6}{11} + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{11} - \frac{3}{2} = \frac{12}{22} - \frac{33}{22} = -\frac{21}{22}$.
- Restar un número racional negativo es equivalente a sumar su opuesto. Por ejemplo: $-2{,}6 - (-3{,}41) = -2{,}6 + 3{,}41 = 0{,}81$.

**4.** Resolvé las siguientes cuentas en tu carpeta.

a. $\frac{3}{7} + \frac{8}{5} - \frac{11}{2}$ b. $23\frac{4}{5} - \left(-4\frac{2}{3}\right)$ c. $-35{,}7 + \frac{2}{5}$

d. $9{,}2 - 0{,}003$ e. $-9{,}2 - 0{,}003$ f. $-\frac{10}{11} - \left(-\frac{5}{4}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right)$

**5.** En estas ecuaciones, la variable representa un número racional. En cada caso encontrá los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad.

a. $x - \frac{7}{8} = 3{,}5$ b. $-\frac{2}{3} + a = \frac{6}{5} - \frac{7}{6}$ c. $-75{,}8 = -b + 28{,}45$

d. $\frac{9}{13} - (-a) = \frac{15}{2}$ e. $z - \left(-\frac{3}{15}\right) = \frac{9}{4} + \frac{3}{15}$ f. $-7\frac{3}{8} = p - \frac{5}{3}$

**Si $a + b = c$, entonces también vale que $c - a = b$ y que $c - b = a$.**
**Si $n - m = q$, entonces también vale que $n - q = m$ y que $q + m = n$.**
Estas relaciones permiten encontrar el valor de la variable que hace verdadera la igualdad en las ecuaciones de la actividad 5.

Para **sumar y restar fracciones**, una estrategia posible es buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador.
Al **sumar o restar expresiones decimales**, tengan cuidado de sumar décimos con décimos, centésimos con centésimos, etcétera.

## Multiplicación y división

**6.** Completá las siguientes multiplicaciones para obtener 1.

$\frac{1}{6} \cdot$ ........ $= 1$ $\quad -53 \cdot$ ........ $= 1$ $\quad -\frac{2}{3} \cdot$ ........ $= 1$ $\quad$ ........ $\cdot \frac{15}{17} = 1$

**7.** Completá las siguientes multiplicaciones.

$8 \cdot$ ........ $= 9$ $\quad$ ........ $\cdot 7 = -2$ $\quad$ ........ $\cdot (-5) = 4$ $\quad$ ........ $\cdot (-3) = -7$

**8.** a. ¿Por qué número hay que multiplicar $-\frac{7}{4}$ para obtener como resultado $\frac{5}{4}$?

b. ¿Es posible encontrar un número que multiplicado por $\frac{5}{6}$ dé $-\frac{7}{3}$?

Si un número multiplicado por otro da como resultado 1, se dice que es su **inverso multiplicativo**. Por ejemplo, $\frac{7}{4}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{4}{7}$, porque $\frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7} = 1$. A su vez, $\frac{4}{7}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{7}{4}$. Todo número racional, excepto el 0, tiene un inverso multiplicativo.

La **regla de los signos** que estudiaron en el capítulo 2 vale para la multiplicación de números racionales: si se multiplican dos números racionales de igual signo, el resultado es positivo y, si son de diferente signo, el resultado es negativo. Lo mismo sucede para la división de dos números racionales: si se dividen dos números de igual signo, el resultado es positivo y, si son de distinto signo, el resultado es negativo.

**9.** Resolvé las siguientes cuentas en tu carpeta.

a. $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{28}{8}$ $\quad$ b. $(-2{,}1) \cdot 5$ $\quad$ c. $1{,}2 \cdot (-6{,}7)$

d. $\left(-\frac{3}{12}\right) \cdot \left(-\frac{6}{8}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right)$ $\quad$ e. $\frac{5}{14} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot 0{,}5$ $\quad$ f. $\left(1 + \frac{5}{3}\right) \cdot (-8) : 7$

Recuerden que para **multiplicar dos fracciones** hay que multiplicar los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.
Para **multiplicar dos expresiones decimales** se pueden expresar con fracciones equivalentes y multiplicarlas.
**Dividir dos fracciones** es equivalente a multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

**10.** Sin hacer la cuenta, señalá las opciones correctas para cada caso. Justificalo.

a. El resultado de $0{,}85 \cdot 4{,}6$ es...

- menor que 4,6.
- mayor que 0,85.
- mayor que 4,6.

b. Si se divide un número por $\frac{1}{4}$, se obtiene un número...

- mayor que el dividendo.
- entero.
- negativo.

**11.** Se sabe que 45,6 dividido un número da por resultado 3,4. ¿Cuál es el número?

**12.** Resolvé las siguientes ecuaciones en las que la variable es un número racional.

a. $m \cdot (-3) = 2$ $\quad$ b. $-7 \cdot x = -5$ $\quad$ c. $3 \cdot a = \frac{2}{35}$

d. $b : (-0{,}2) = \frac{1}{4}$ $\quad$ e. $y \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) = 28$ $\quad$ f. $\frac{3}{8} : x = \frac{6}{7}$

g. $-\frac{5}{4} : a = 0{,}6$ $\quad$ h. $a : \left(-\frac{5}{4}\right) = 0{,}6$ $\quad$ i. $\frac{1}{15} \cdot (-p) = -\frac{2}{6}$

Recuerden que **resolver una ecuación** es encontrar los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad.

**Si $a \cdot b = c$, entonces también vale que $c : a = b$ y que $c : b = a$.**
**Si $n : m = q$, entonces también vale que $n : q = m$ y que $q \cdot m = n$.**
Estas relaciones permiten encontrar el valor de la variable que hace verdadera la igualdad en ecuaciones como las de la actividad 12.

## Potenciación

**13.** Calculá las siguientes potencias.

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$ ........ $\left(-\frac{2}{4}\right)^2 =$ ........ $\left(\frac{6}{5}\right)^3 =$ ........ $\left(-\frac{2}{7}\right)^3 =$ ........

**14.** En cada caso, encontrá, si es posible, un número que cumpla lo pedido.

a. Elevado al cubo da $\frac{8}{27}$.
b. Elevado al cubo da $-\frac{64}{125}$.
c. Elevado al cuadrado da $\frac{1}{4}$.
d. Elevado al cuadrado da $-\frac{1}{16}$.

Si se quiere elevar $\frac{3}{4}$ al cuadrado, es necesario usar los paréntesis así: $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Si no se usan, queda $\frac{3^2}{4}$ y se considera que solo el numerador se eleva al cuadrado: $\frac{3^2}{4} = \frac{9}{4}$ y $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Si $n$ en un número natural, elevar un número a la potencia $n$ es multiplicar ese número, que se llama **base**, tantas veces como determina el **exponente** $n$. Por ejemplo, $\left(-\frac{3}{8}\right)^3 = \left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{27}{512}$, en el que $-\frac{3}{8}$ es la base y 3 es el exponente.

Del mismo modo que en los números enteros, si se eleva un número negativo a un exponente par, el resultado es positivo, y si se eleva a un exponente impar, el resultado es negativo.

**15.** Si $a$ es un número racional cualquiera, en cada caso encontrá, si es posible, tres valores del número $a$ que cumplan la desigualdad.

a. $(-a)^8 < a^8$
b. $(-a)^8 > a^8$
c. $(-a)^7 < a^7$

**16.** Decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus decisiones. Luego, modificá las afirmaciones falsas para que resulten verdaderas.

a. La expresiones $a^4 \cdot a^3$ y $a^{12}$ son equivalentes.
b. $(x^4)^5$ es equivalente a $x^9$.
c. Las expresiones $n^{15} : n^7$ y $n^8$ dan el mismo resultado para cualquier valor de $n$.

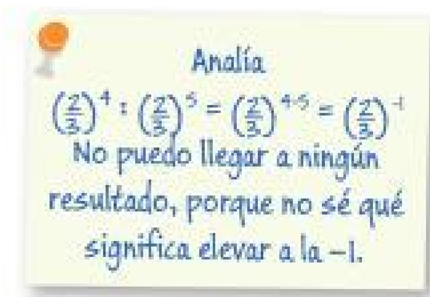
Si $a$ es un número racional y $m$ y $n$ son dos números naturales, se cumplen las siguientes igualdades:
$\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\mathbf{a^n : a^m = a^{n-m}}$ **con** $\mathbf{m < n}$ $\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$
Estudiaron ejemplos de estas propiedades en la actividad 16.
Para exponente 0, se define $\mathbf{a^0 = 1}$ **para cualquier valor de** $\mathbf{a}$.
¿Cómo afecta esta definición a las propiedades anteriores? Por ejemplo, se sabe que $9{,}3^{12} : 9{,}3^{12} = 1$, porque se divide un número por sí mismo. Si la segunda propiedad enunciada fuera cierta para $n = m$, se podrían restar los exponentes y obtener $9{,}3^{12} : 9{,}3^{12} = 9{,}3^{12-12} = 9{,}3^0$, resultando $1 = 9{,}3^0$, lo cual es correcto por la definición que se dio de potencia 0. De este modo, con esa definición las tres propiedades anteriores valen aun cuando $n$ o $m$ son 0 o cuando $m = n$.

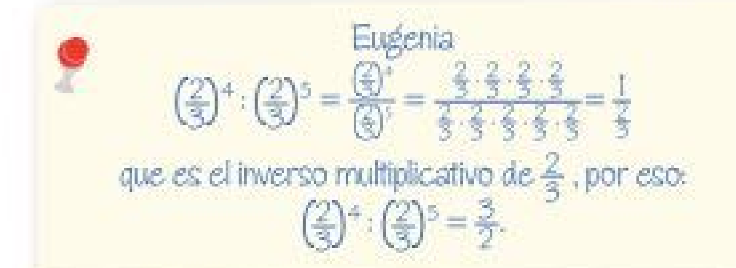
**17.** Sin hacer las cuentas, colocá <, > o =, según corresponda.

a. $\left(-\frac{17}{89}\right)^{52}$ ........ $\left(\frac{17}{89}\right)^{52}$
b. $(-4{,}52)^{10} : (-4{,}52)^6$ ........ $(-4{,}52)^{15}$
c. $\left(\frac{5}{3}\right)^{23} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^7$ ........ $\left(\frac{5}{3}\right)^{30}$
d. $\left(\frac{2}{7}\right)^{11} : \left(\frac{2}{7}\right)^9$ ........ $\left(\frac{2}{7}\right)^3$

## Potenciación y cálculos combinados

**18.** Analía y Eugenia tenían que resolver $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^5$. Analía decidió usar las propiedades de la potencia, Eugenia lo resolvió de otra manera.




a. ¿Son correctos los planteos de Analía y de Eugenia?

.......................................................................................................................

b. ¿Es correcto afirmar que el resultado de $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ es $\frac{3}{2}$? ¿Por qué?

.......................................................................................................................

En la actividad 18 se obtienen dos resultados para $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^5$, que son $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ y $\frac{3}{2}$. De este modo, resulta que $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$.
Se define, entonces, que **elevar un número racional a la potencia –1** es igual a calcular su inverso multiplicativo. Por ejemplo:

$\left(-\frac{17}{8}\right)^{-1} = -\frac{8}{17}$ $\qquad 0{,}238^{-1} = \frac{1}{0{,}238}$ $\qquad 7^{-1} = \frac{1}{7}$

**19.** a. ¿Cómo resolverías $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$?

b. Decidí si el siguiente procedimiento es correcto.



Usando las propiedades de la potencia, y como $-2 = -1 \cdot 2$, resulta que:
$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^2$

Y, como elevar a la potencia –1 es calcular el inverso multiplicativo, entonces:
$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

**20.** En grupos, sin hacer las cuentas, coloquen <, > o =, según corresponda.

a. $(-5)^{-8}$ .............. $5^{-8}$    b. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-8}$ .............. $\left(-\frac{1}{5}\right)^{8}$    c. $\left(\frac{7}{2}\right)^{-3}$ .............. 1

**21.** Resolvé las siguientes ecuaciones.

a. $x^3 = -0{,}125$    b. $a^2 = \frac{49}{36}$    c. $b^3 = -\frac{729}{125}$    d. $n^6 = -\frac{1}{64}$

**22.** Resolvé estos cálculos sin utilizar la calculadora. Escribí cómo lo hiciste.

a. $-4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{7} \cdot (-1{,}4) + (0{,}1)^4$

b. $\frac{6}{15} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{12} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

c. $\frac{2{,}1 : (-0{,}5)^2}{4} - \frac{3}{7} \cdot \frac{21}{15}$

d. $-\frac{7}{2^2} : \left(\frac{14}{3} - 7\right)^3$

Un cálculo que combina varias operaciones podría interpretarse de diferentes maneras y dar resultados distintos. Para que eso no ocurra es necesario usar una convención: primero se resuelven las multiplicaciones y las divisiones, y luego, las sumas y las restas. Cuando en un cálculo combinado hay paréntesis o corchetes, a veces es necesario resolver las operaciones que están dentro del paréntesis para poder seguir calculando.

## Expresiones decimales de los números racionales

Un número racional puede estar dado por su expresión **decimal** o por su expresión **fraccionaria**. Por ejemplo, la expresión decimal de $\frac{4}{5}$ es 0,8, y se obtiene haciendo 4 : 5.

**23.** Decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tus decisiones.

a. Una expresión fraccionaria de 2,7 es $\frac{2}{7}$.

b. El resultado de la cuenta 45 : 13 es $\frac{45}{13}$.

c. Al hacer 15 : 8 en la calculadora, se obtiene 15,8.

d. Para obtener –0,004 en la calculadora, se puede hacer – 4 : 1.000.

**24.** Completá la siguiente tabla.

| Expresión decimal | 0,89 | | 0,00008 | | 876,09 | | 0,700 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Expresión fraccionaria | | $\frac{13}{25}$ | | $\frac{89}{16}$ | | $\frac{140}{28}$ | | $\frac{35}{15}$ |

Las expresiones decimales de algunos números racionales tienen una cantidad determinada de cifras detrás de la coma. Estas expresiones se llaman **expresiones decimales finitas**. Otros números racionales tienen una expresión decimal en la que las cifras detrás de la coma no terminan y a partir de alguna cifra se empiezan a repetir. Estas expresiones se llaman **expresiones decimales periódicas** y las cifras que se repiten sucesivamente forman el **período**.
Por ejemplo, $\frac{45}{24} = 1{,}875$ es una expresión decimal finita, porque solo tiene 3 cifras detrás de la coma. En cambio, $\frac{172}{33}$ tienen una expresión decimal periódica, ya que 172 : 33 = 5,212121..., y el 21 se repite de manera infinita. El período es 21 y la expresión decimal se escribe $5{,}\widehat{21}$, indicando el período con un arco.

**25.** a. ¿Cuál es la expresión decimal para $\frac{1}{9}$? ¿Y para $\frac{5}{9}$? ¿Y para $\frac{8}{9}$?

b. ¿Cuál es la expresión fraccionaria para $0{,}\widehat{4}$? ¿Y para $0{,}0\widehat{4}$?

c. ¿Cuál es la fracción que representa a $0{,}\widehat{7}$? ¿Y a $0{,}0\widehat{7}$? ¿Y a $-0{,}00\widehat{7}$?

Conociendo que la expresión decimal de $\frac{1}{9}$ es $0{,}\widehat{1}$ se pueden conocer las expresiones fraccionarias de $0{,}\widehat{2}$; $0{,}\widehat{4}$; $0{,}\widehat{5}$; $0{,}\widehat{6}$; etcétera.

1 : 9 = 0,111111....

$\frac{1}{9} = 0{,}\widehat{1}$ (· 2) → $\frac{2}{9} = 0{,}\widehat{2}$ ; (· 4) → $\frac{4}{9} = 0{,}\widehat{4}$

Sabiendo, por ejemplo, que $\frac{7}{9} = 0{,}\widehat{7}$ se puede afirmar que la fracción que representa a $0{,}0\widehat{7}$ es $\frac{7}{90}$, porque $0{,}\widehat{7} = \frac{7}{9}$ y $0{,}0\widehat{7} = 0{,}\widehat{7} : 10 = \frac{7}{9} : 10 = \frac{7}{90}$.

$\frac{7}{9} = 0{,}\widehat{7}$ (: 10) → $\frac{7}{90} = 0{,}0\widehat{7}$ ; (: 100) → $\frac{7}{900} = 0{,}00\widehat{7}$

**26.** Encontrá la fracción que representa cada expresión decimal. Comprobá con la calculadora que la fracción propuesta sea correcta.

a. $0{,}0\overset{\frown}{8}$ b. $0{,}000\overset{\frown}{7}$ c. $-0{,}00\overset{\frown}{3}$

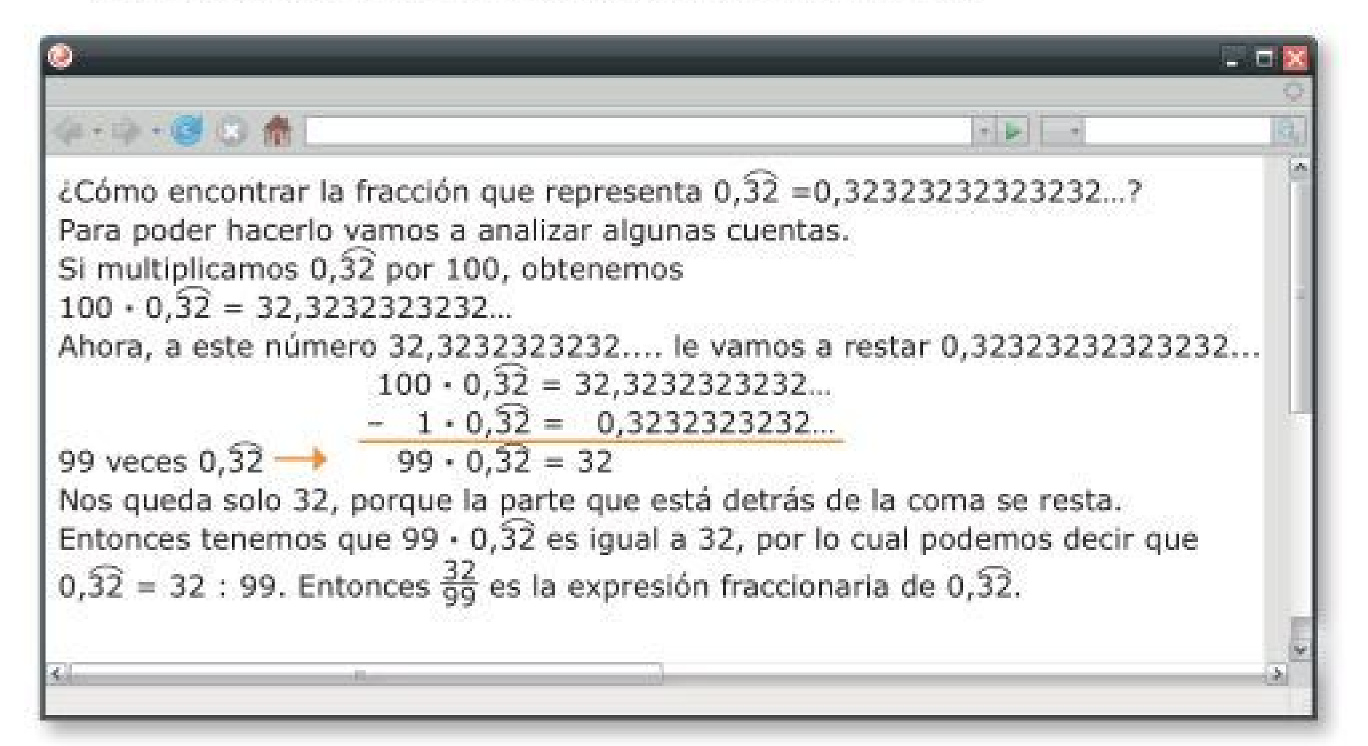
d. $-0{,}00\overset{\frown}{2}$ e. $0{,}0000\overset{\frown}{5}$ f. $0{,}\overset{\frown}{9}$

Usando lo que propone la plaqueta de la página anterior se tiene que $0{,}\overset{\frown}{9} = 1$.

**27.** a. Sabiendo que $\frac{4}{33} = 0{,}\overset{\frown}{12}$, ¿cómo usarías esa información para encontrar la fracción que representa a $0{,}\overset{\frown}{24}$?

b. ¿Podrías encontrar una fracción que represente a $0{,}\overset{\frown}{06}$?

**28.** Luchy se preguntó: "¿Cómo puedo encontrar la fracción decimal de una expresión decimal periódica si el período de la expresión decimal tiene dos cifras?" Buscó en internet y encontró el siguiente método.



¿Cómo encontrar la fracción que representa $0{,}\overset{\frown}{32}$ =0,32323232323232...?
Para poder hacerlo vamos a analizar algunas cuentas.
Si multiplicamos $0{,}\overset{\frown}{32}$ por 100, obtenemos
$100 \cdot 0{,}\overset{\frown}{32} = 32{,}3232323232...$
Ahora, a este número 32,3232323232.... le vamos a restar 0,32323232323232...

$$\begin{array}{r} 100 \cdot 0{,}\overset{\frown}{32} = 32{,}3232323232... \\ -\quad 1 \cdot 0{,}\overset{\frown}{32} = \phantom{3}0{,}3232323232... \\ \hline 99 \cdot 0{,}\overset{\frown}{32} = 32 \end{array}$$

99 veces $0{,}\overset{\frown}{32}$ →

Nos queda solo 32, porque la parte que está detrás de la coma se resta.
Entonces tenemos que $99 \cdot 0{,}\overset{\frown}{32}$ es igual a 32, por lo cual podemos decir que $0{,}\overset{\frown}{32} = 32 : 99$. Entonces $\frac{32}{99}$ es la expresión fraccionaria de $0{,}\overset{\frown}{32}$.

Estudiá si este método que encontró Luchy sirve para cualquier expresión decimal periódica que tenga un período de dos cifras. Si te parece que sirve, para cada expresión decimal periódica, encontrá una fracción que la represente.

a. $0{,}\overset{\frown}{74}$ b. $0{,}\overset{\frown}{45}$ c. $0{,}\overset{\frown}{07}$ d. $0{,}\overset{\frown}{50}$

**29.** ¿Cuál es la fracción que representa a $0{,}\overset{\frown}{456}$?

Al usar el método de la actividad 28 para cualquier expresión decimal periódica cuyo período tenga solo dos cifras, como $0{,}\overset{\frown}{ab} = 0{,}abababab\ldots$ en la cual $a$ y $b$ son cifras, resulta $0{,}\overset{\frown}{ab} = \frac{ab}{99}$ y esta última es su expresión fraccionaria. Por ejemplo, $0{,}\overset{\frown}{67} = \frac{67}{99}$.
Se puede proceder del mismo modo con las expresiones decimales con un período de más de 2 cifras. Si se tiene un número decimal periódico con tres cifras en su período, por ejemplo $0{,}\overset{\frown}{abc} = 0{,}abcabcabc\ldots$ en el cual $a$, $b$ y $c$ son cifras, resulta $0{,}\overset{\frown}{abc} = \frac{abc}{999}$ y esta última es su expresión fraccionaria. Por ejemplo, $0{,}\overset{\frown}{553} = \frac{553}{999}$ y $0{,}\overset{\frown}{023} = \frac{23}{999}$.

**30.** Para cada número decimal, escribí una expresión fraccionaria que lo represente.

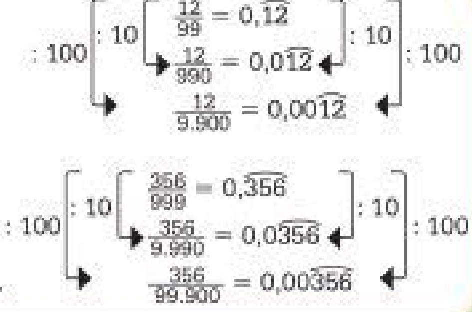
a. $0,\overset{\frown}{97} =$ ..........  b. $0,0\overset{\frown}{97} =$ ..........

c. $0,00\overset{\frown}{943} =$ ..........  d. $0,\overset{\frown}{076} =$ ..........

e. $0,0\overset{\frown}{76} =$ ..........  f. $0,0\overset{\frown}{12675} =$ ..........

Conociendo la fracción que representa, por ejemplo, a $0,\overset{\frown}{12}$, se puede encontrar la fracción que representa a otros números, como $0,0\overset{\frown}{12}$ o $0,00\overset{\frown}{12}$.

Conociendo la expresión fraccionaria que representa a $0,\overset{\frown}{356}$ se puede encontrar la fracción que representa a $0,0\overset{\frown}{356}$ o a $0,00\overset{\frown}{356}$.




**31.** En grupos, analicen si este procedimiento para encontrar una expresión fraccionaria de una expresión decimal periódica cualquiera es correcto.

> Si se quiere encontrar una fracción que represente al número $4,8\overset{\frown}{35}$, se puede descomponer al número en dos sumandos, separando la expresión decimal finita que aparece antes del periodo: $4,8\overset{\frown}{35} = 4,8 + 0,0\overset{\frown}{35}$.
> Y como $0,\overset{\frown}{35} = \frac{35}{99}$, entonces $0,0\overset{\frown}{35} = \frac{35}{990}$.
> Por lo tanto, $4,8\overset{\frown}{35} = 4,8 + 0,0\overset{\frown}{35} = \frac{48}{10} + \frac{35}{990} = \frac{4.752}{990} + \frac{35}{990} = \frac{4.787}{990}$.
> Y resulta $4,8\overset{\frown}{35} = \frac{4.787}{990}$.

Para comprobar que la fracción es la que se buscaba, pueden ingresar 4.787 : 990 en la calculadora y obtendrán 4,8353535... .

**32.** a. ¿Cómo harías para encontrar la fracción que representa al número $1,\overset{\frown}{34}$?

..........

b. ¿Cómo harías para encontrar la fracción que representa al número $-3,0\overset{\frown}{56}$?

..........

**33.** Escribí una expresión fraccionaria equivalente a cada expresión decimal periódica.

a. $4,9\overset{\frown}{34}$ ..........  b. $-12,03\overset{\frown}{5}$ ..........

c. $98,\overset{\frown}{95432}$ ..........  d. $0,49\overset{\frown}{3}$ ..........

e. $23,5\overset{\frown}{007}$ ..........  f. $-9,000\overset{\frown}{468}$ ..........

**34.** ¿Cuál es la expresión decimal para la fracción $\frac{4}{11}$? ¿Su expresión decimal es finita o periódica?

..........

**35.** Escribí 5 fracciones que tengan una expresión decimal periódica y 5 fracciones que tengan una expresión decimal finita.

..........

**36.** Decidan en grupos si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen sus decisiones en la carpeta.

a. Si una fracción tiene denominador 3, su expresión decimal es periódica.

b. Si una fracción tiene denominador 5, su expresión decimal es finita.

c. Si una fracción es irreducible y su denominador es múltiplo de 7, su expresión decimal es periódica.

d. Si una fracción tiene denominador 16, su expresión decimal es finita.

e. Todas las fracciones decimales tienen una expresión decimal finita.

Una fracción es **irreducible** si el numerador y el denominador no tienen factores en común, es decir, si la fracción ya no se puede simplificar más.

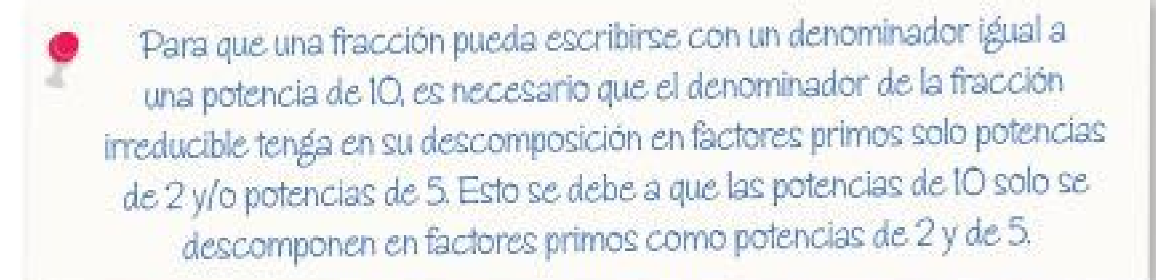
Las **fracciones decimales** son las que tienen en el denominador una potencia de 10. Las potencias de 10 son $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1.000$, etcétera.

**37.** a. Indicá cuáles de estas fracciones tienen una expresión equivalente cuyo denominador es una potencia de 10.

$-\frac{9}{30}$ $-\frac{5}{13}$ $\frac{7}{25}$ $-\frac{4}{30}$ $\frac{8}{15}$ $-\frac{6}{15}$ $\frac{6}{20}$

b. Indicá cuáles de las fracciones anteriores tienen una expresión decimal finita y cuáles tienen una expresión decimal periódica. Averigualo sin hallar las expresiones decimales.

**38.** Estudien en grupos si la siguiente regla sirve siempre, a veces o nunca.




Las potencias de 2 son $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, etcétera. Las potencias de 5 son $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, etcétera.

- Si una fracción es equivalente a una fracción decimal, entonces esa fracción tiene una expresión decimal finita. En caso contrario, la expresión decimal es periódica.
- Para que una fracción admita una expresión decimal finita es necesario que pueda representarse por una fracción irreducible cuyo denominador tenga una descomposición en factores primos en la que solo haya potencias de 2 y/o potencias de 5.
- Si una fracción se puede escribir como una fracción decimal equivalente, la potencia de 10 del denominador informa cuántas cifras después de la coma tiene su escritura decimal.

Observen los siguientes ejemplos:

- $\frac{3}{16} = \frac{1.875}{10.000} = 0{,}1875$, porque $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ y, como $10.000 = 10^4$, tiene 4 lugares detrás de la coma.
- $\frac{3}{75} = \frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0{,}04$, porque en la expresión reducida $\frac{1}{25}$ el 25 es $5^2$.
- También tiene denominador 75 la fracción $\frac{11}{75}$, pero su expresión decimal es periódica, $0{,}14\overset{\frown}{6}$, ya que no se puede simplificar y $75 = 3 \cdot 5^2$.
- $\frac{1}{7} = 0{,}\overset{\frown}{142857}$ tiene una expresión decimal periódica, porque 7 es primo y por eso no se lo puede transformar en potencia de 10.

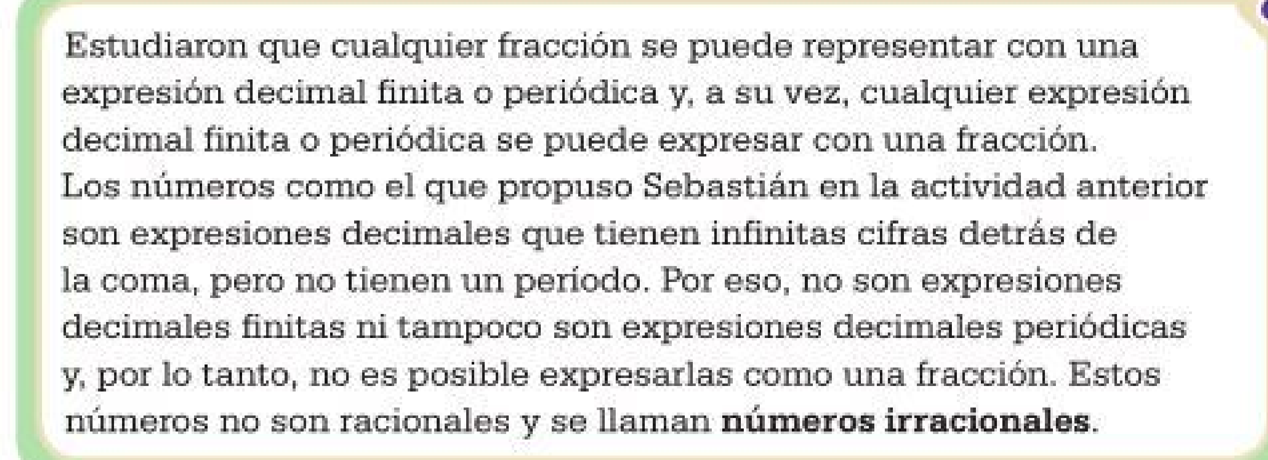
## Existencia de números irracionales

**39.** Sebastián inventó un número.

> Empiezo con 0 coma y detrás de la coma voy escribiendo todos los números naturales de manera continua: 0,12345678910111213141516171819202122...

a. ¿Es posible expresar como fracción el número que inventó Sebastián?

b. Inventá otros números como el de Sebastián.



Estudiaron que cualquier fracción se puede representar con una expresión decimal finita o periódica y, a su vez, cualquier expresión decimal finita o periódica se puede expresar con una fracción.
Los números como el que propuso Sebastián en la actividad anterior son expresiones decimales que tienen infinitas cifras detrás de la coma, pero no tienen un período. Por eso, no son expresiones decimales finitas ni tampoco son expresiones decimales periódicas y, por lo tanto, no es posible expresarlas como una fracción. Estos números no son racionales y se llaman **números irracionales**.

**40.** Trazá tres circunferencias. Luego, para cada una, usá un hilo para medir la longitud de la circunferencia y la longitud del diámetro, y completá la tabla.

| | Longitud de la circunferencia | Longitud del diámetro | Cociente entre la longitud de la circunferencia y la longitud del diámetro |
|---|---|---|---|
| Circunferencia 1 | | | |
| Circunferencia 2 | | | |
| Circunferencia 3 | | | |

En la última columna de la tabla de la actividad anterior seguramente obtuvieron valores cercanos a 3,14. Esto significa que sea cual fuere el tamaño de una circunferencia, la relación entre su longitud y su diámetro es siempre 3,14, aproximadamente. Es decir que el diámetro entra 3 veces y un poco más en la longitud de la circunferencia.
Este número, que es constante para todas las circunferencias, tiene una expresión decimal con infinitas cifras detrás de la coma, pero no tiene un período. Es un número irracional y, como tal, no puede expresarse como una fracción.
Es muy utilizado y se lo conoce desde la antigüedad, y como no se puede escribir toda su expresión decimal, es necesario darle un nombre. Se lo llamó $\pi$, una letra griega que se dice "pi".

**41.** Averiguá cuál es el valor exacto de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

**42.** Cecilia trataba de encontrar el valor exacto de $\sqrt{2}$. Respondan en grupos.

a. Cecilia usó una calculadora común y obtuvo este resultado.




Quiso comprobar si el resultado estaba bien y realizó la siguiente cuenta: 1,4142135 · 1,4142135. ¿Qué resultado esperaba obtener? Hagan la cuenta.

b. Luego probó con la calculadora de su celular y obtuvo el siguiente resultado.

√(2)
1,4142135624

Quiso comprobar si ese era el resultado exacto haciendo la cuenta 1,4142135624 · 1,4142135624. Realicen esa cuenta y escriban el resultado.

c. Intenten obtener el resultado exacto de $\sqrt{2}$ con diferentes calculadoras. Si obtienen un valor diferente de los dos anteriores, ingresen nuevamente ese valor en la calculadora y eleven el número al cuadrado.

El valor exacto de la diagonal de un cuadrado de lado 1 es $\sqrt{2}$.
Al hacer esa operación en la calculadora, se obtienen diferentes valores, pero al elevar al cuadrado esos números no se obtiene 2.
Por ejemplo, si se ingresa en la calculadora 1,4142135 · 1,4142135, esta devuelve el resultado 1,9999998. Y si se ingresa la cuenta 1,4142135624 · 1,4142135624, devuelve 2,0000000001.
Los resultados son siempre números cercanos a 2, pero no iguales a 2. Se pueden buscar números con más cifras decimales, pero, al elevarlos al cuadrado, nunca se obtiene 2. ¿Por qué sucede esto?
La expresión decimal obtenida termina en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Al elevar al cuadrado quisiéramos que todas las cifras decimales sean 0, en particular la última debe ser 0. Pero ocurre lo siguiente.

| Última cifra decimal | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Última cifra del cuadrado | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |

Por lo que la última cifra nunca es 0. Entonces $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional con expresión decimal finita. No vale la pena buscar calculadoras más potentes que den más cifras. Tampoco se puede escribir como una fracción. Por eso $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Hay varias maneras de argumentar que $\sqrt{2}$ es irracional.
Les proponemos que busquen en internet alguna demostración, por ejemplo en *http://goo.gl/ImI05P*, y que la discutan con sus compañeros.




## Redondeo y truncamiento

**43.** a. Usá la calculadora para encontrar la expresión decimal de $\frac{25}{11}$. ¿Esa expresión decimal es finita o periódica?

b. Al hacer la cuenta anterior en una calculadora, el visor mostró 2,272727273 y al hacerla en otra, el resultado fue 2,272727272. ¿Por qué sucede esto?

**44.** Comparen con sus compañeros qué número aparece en el visor de sus calculadoras al hacer 2 : 3.

**45.** En esta recta numérica solo están marcados números con dos cifras decimales.




a. Ubicá en esa recta, aproximadamente, los siguientes números: 41,159745; 41,1438901; 41,15128; 41,17847; 41,1111789; 41,119762.

b. Para cada número que ubicaste, indicá cuál de los números que están marcados en la recta es el más cercano.

c. Para cada número que ubicaste, indicá entre qué dos números de tres cifras decimales se encuentra y de cuál de los dos está más cerca.



Al buscar la expresión decimal de $\frac{25}{11}$ con varias calculadoras, en algunas aparece 2,272727273 y en otras 2,272727272. Ninguno de los dos es su expresión decimal, porque, tal como estudiaron anteriormente, $\frac{25}{11}$ tiene una expresión decimal periódica y es $2,\overset{\frown}{27}$.
Lo que hace la calculadora es dar una **aproximación** de ese número. Algunas lo hacen redondeando y otras, truncando.
Para **truncar** a 2 cifras decimales se corta el número, eliminando las cifras decimales a la derecha de la segunda. Por ejemplo, al truncar 41,15847 a 2 cifras decimales, se obtiene 41,15.
Para **redondear** a 2 cifras decimales, se considera la tercera cifra decimal para decidir si se modifica o no la segunda. Si la tercera cifra es mayor o igual a 5, se aumenta en uno la segunda cifra y se eliminan las posteriores; si es menor que 5, se mantiene igual la segunda y se eliminan las posteriores. De esta manera la aproximación del número es aquel número de dos cifras decimales que está más cerca. Por ejemplo, al redondear 41,15847 a dos cifras decimales, se obtiene 41,16, y al redondear 41,15247 a dos cifras decimales, se obtiene 41,15.

## Orden y comparación

**46.** Decidí si las siguientes afirmaciones son ciertas. Justificá tus decisiones.

a. $-3{,}45$ es mayor que $-\frac{1}{4}$.
b. 5 es menor que $-\frac{57}{5}$.
c. $-4{,}76$ es menor que $-4{,}7$.
d. $-\frac{2}{3}$ es igual a $\frac{2}{3}$.

**47.** Escribí los números enteros más cercanos a cada número racional de la tabla.

| Número entero anterior | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número racional | $\frac{6}{4}$ | $-\frac{6}{4}$ | $-2{,}5\widehat{34}$ | $\frac{342}{33}$ | $-\frac{560}{250}$ | $-3.419{,}7309$ | $-6\frac{1}{2}$ |
| Número entero posterior | | | | | | | |

**48.** Compará los siguientes números usando los símbolos >, < o =.

a. $-54{,}7289$ .......... $-54{,}7245$
b. $-\frac{13}{84}$ .......... $-\frac{62}{84}$
c. $\frac{56}{7}$ .......... $\frac{56}{5}$
d. $15{,}09$ .......... $15{,}1$
e. $3{,}21$ .......... $\frac{762}{1.490}$
f. $\frac{63}{84}$ .......... $\frac{126}{250}$
g. $\frac{30}{20}$ .......... $\frac{21}{14}$
h. $\frac{15}{16}$ .......... $\frac{20}{21}$
i. $-\frac{23}{15}$ .......... $-\frac{15}{7}$

**49.** En cada caso, ordená los números de menor a mayor.

a. $-15{,}3\widehat{4}$ $\quad -39{,}3$ $\quad -40{,}01$ $\quad -40{,}11$ $\quad -15{,}34$ $\quad -15{,}345$
b. $-\frac{13}{6}$ $\quad \frac{541}{9.030}$ $\quad \frac{35}{14}$ $\quad -2\frac{1}{8}$ $\quad -\frac{391}{230}$ $\quad \frac{44}{15}$
c. $\frac{2}{3}$ $\quad 0{,}66$ $\quad -\frac{4}{10}$ $\quad 0{,}6\widehat{7}$ $\quad \frac{666}{100}$ $\quad -\frac{4}{9}$

**50.** En cada caso, indicá si las dos fracciones son equivalentes.

a. $-\frac{45}{3}$ y $\frac{90}{6}$
b. $\frac{4}{10}$ y $\frac{10}{25}$
c. $\frac{66}{12}$ y $\frac{22}{3}$

Las fracciones $\frac{8}{6}$ y $\frac{12}{9}$ son equivalentes porque representan al mismo número racional, aun cuando una no se obtenga de la otra multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador por un mismo número.

**51.** Para cada par de números, escribí una expresión decimal finita y una expresión decimal periódica que esté entre ellos.

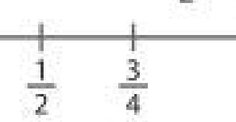
a. $6{,}\widehat{4}$ y $6{,}\widehat{5}$
b. $-5{,}7$ y $-5{,}6$
c. $-4{,}061$ y $-4{,}06$
d. $9{,}82$ y $9{,}822$

**52.** Decidan en grupos si las siguientes estrategias para comparar dos fracciones sirven siempre, a veces o nunca. Justifiquen sus decisiones.

a. Si tienen igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador.
b. Si tienen igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.
c. Se busca una fracción equivalente a cada fracción a comparar que tenga igual denominador o igual numerador y se ordenan las fracciones halladas.
d. Se ubican las fracciones entre enteros o se las escribe como fracciones mixtas.
e. Se estudia cuánto le falta a cada fracción para llegar a 1.

## Recta numérica

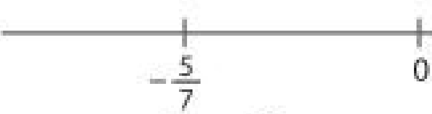
**53.** En la siguiente recta se encuentran ubicados los números $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.



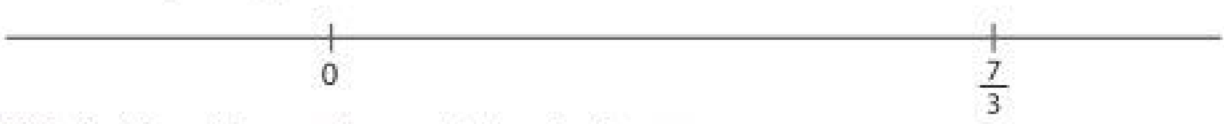

a. Ubicá los números $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{8}$.

b. Ubicá el $\frac{2}{3}$ y el $-\frac{1}{3}$.

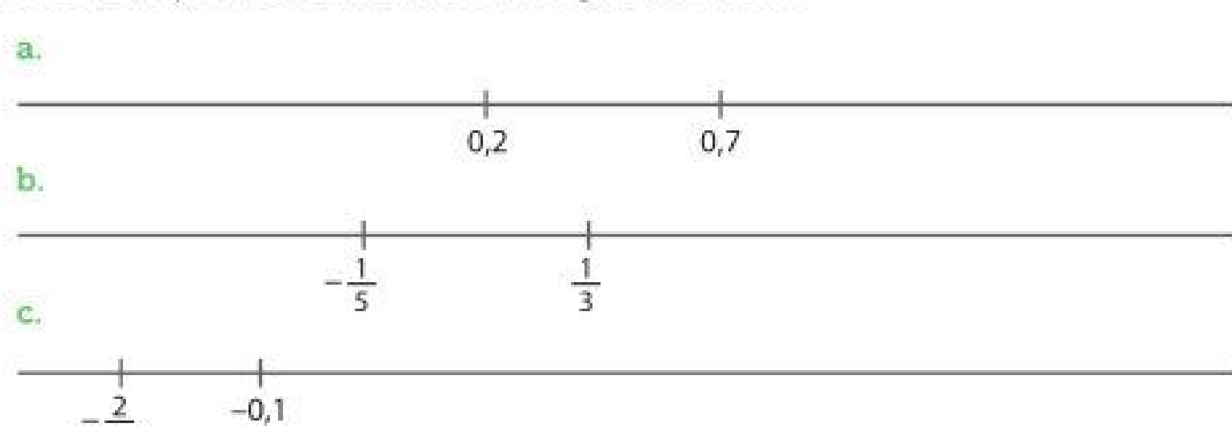
**54.** Ubicá el 1 y el $\frac{3}{5}$ en esta recta.




**55.** Ubicá el $-\frac{1}{3}$ y el $\frac{1}{2}$ en esta recta.

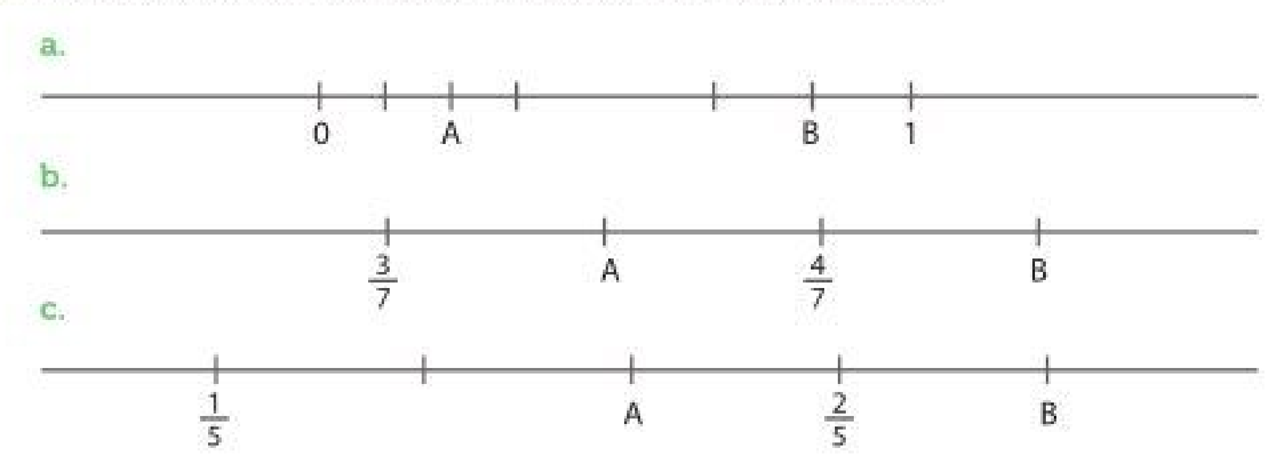



**56.** Ubicá el 0 y el 1 en cada una de las siguientes rectas.

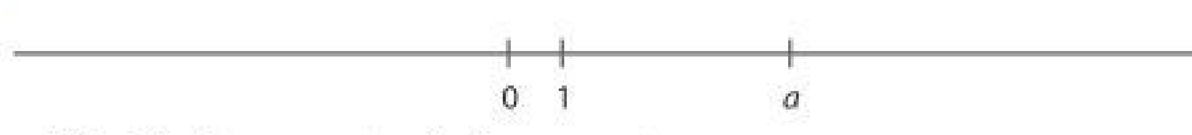





**57.** En cada caso, determiná qué número representa cada letra.




**58.** En la siguiente recta numérica se ubicaron el 0, el 1 y un número racional $a$.




a. Ubicá el número $a + 1$ y el número $a - 1$.

b. Ubicá el número $-a$. ¿Cómo lo ubicaste?

c. Ubicá los números $-a + 1$, $-a - 1$, $\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{3}$, $\frac{2}{3}\,a$, $\frac{a}{2} + 1$ y $-\frac{a}{2} - 1$.

No es necesario saber cuál es el número $a$ para resolver la actividad 58.

$-a$ representa el opuesto de $a$.

## Recta numérica y opuestos

**59.** Para la recta de la actividad 58, decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones en la carpeta.

a. $\frac{a}{2} + 1$ está a la misma distancia del 0 que el $-\frac{a}{2} - 1$.

b. El opuesto de $-a + 1$ es $-a - 1$.

c. El opuesto de $a - 1$ es $-a + 1$.

**60.** a. En esta recta ubicá un número racional $a$ sabiendo que es negativo.




b. ¿Dónde ubicarías al opuesto de $a$, es decir, $-a$?

**61.** Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justificá tus decisiones.

a. Si $p$ es número negativo, entonces su opuesto es positivo.

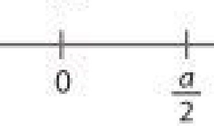
b. Si $p$ es un número negativo, entonces $-p$ es positivo.

c. $-p$ siempre es un número negativo.

- Si $a$ representa un número positivo, entonces $-a$ representa un número negativo.
- Si $a$ representa un número negativo, entonces $-a$ representa un número positivo, porque $-a$ es el opuesto de $a$ y los opuestos de los números negativos son positivos.

$-a$ puede representar tanto un número negativo como un número positivo. El signo menos no está indicando que sea un número negativo, sino que es el opuesto.

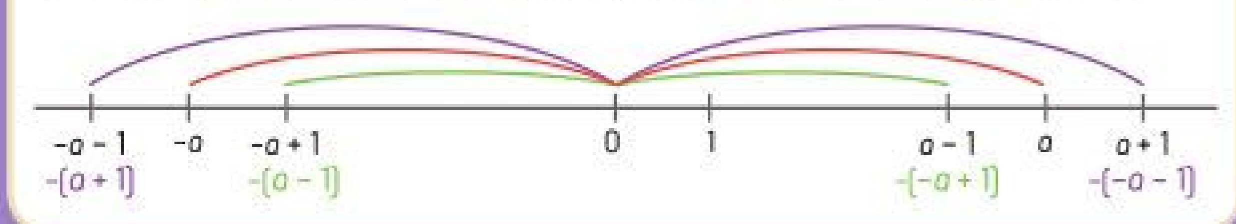
**62.** En la siguiente recta se ubicó el número $\frac{a}{2}$ en el cual $a$ es un número.




a. Ubicá estos números: $a$; $\frac{a}{3}$; $a + 1$; $-\frac{a}{2} + 1$; $-\frac{a}{2} - 1$; $-a - 1$ y $-a + 1$.

b. Considerá los números ubicados y señalá pares de ellos que sean opuestos.

Como al poner el signo menos antes de un número se obtiene su opuesto, el opuesto de $a + 1$ es $-(a + 1)$.
Por lo trabajado en la actividad anterior, $-(a + 1)$ ocupa el mismo lugar que $-a - 1$. Por lo tanto, son iguales, es decir que $-(a + 1) = -a - 1$.



## Densidad de los números racionales

**63.** a. Encontrá 5 números que estén entre –13,05 y –13,03. ¿Es posible encontrar una expresión decimal periódica? ¿Cuántos números hay en total, periódicos y no periódicos, entre –13,05 y –13,03?

b. ¿Cuántos números hay entre $105,0\overset{\frown}{3}$ y $105,0\overset{\frown}{4}$? Encontrá 5 de esos números. ¿Existe alguna expresión decimal finita entre $105,0\overset{\frown}{3}$ y $105,0\overset{\frown}{4}$?

**64.** a. ¿Cuántos números entre 34,56 y 35 tienen dos cifras decimales?

b. ¿Y si se permite cualquier cantidad de cifras decimales?

**65.** a. ¿Cuántas fracciones con denominador 7 hay entre 1 y 2? ¿Y entre –8 y –7?

b. ¿Cuántas fracciones con denominador 43 hay entre 6 y 7? ¿Y entre 60 y 70?

c. ¿Cuántas fracciones con denominador 129 hay entre 100 y 101?

**66.** a. ¿Cuántas fracciones con denominador 16 hay entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{15}{16}$?

b. ¿Y con denominador 4? ¿Y con denominador 32?

c. ¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{15}{16}$?

**67.** a. Encontrá una fracción con denominador 10 y otra con denominador 100 que estén entre $\frac{1}{36}$ y $\frac{1}{15}$.

b. ¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{36}$ y $\frac{1}{15}$?

**68.** a. Encontrá todas las fracciones con denominador 3 que estén entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{4}$.

b. ¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{4}$ si se permite cualquier denominador?

**69.** a. Encontrá dos fracciones entre las que no haya una fracción con denominador 4.

b. Encontrá dos números decimales entre los que no haya una fracción decimal.

Entre dos números racionales siempre es posible encontrar otro número racional diferente a ambos. Esta propiedad se llama **propiedad de densidad de los números racionales**, por eso se dice que los números racionales son **densos**.
Los números enteros no cumplen esta propiedad. Por ejemplo, entre los números enteros 23 y 24 no hay otro número entero.

## Consecuencias de la densidad de los racionales

**70.** a. ¿Cuál es el mayor de todos los números de dos cifras decimales que están entre 1 y 2? ¿Y el menor?

b. ¿Cuál es el mayor de todos los números de tres cifras decimales que están entre 1 y 2? ¿Y el menor?

c. ¿Cuál es el mayor de todos los números racionales que están entre 1 y 2? ¿Y el menor?

**71.** a. Realicen este juego en parejas. En una hoja anoten el número 1 y luego, por turnos, sumen un número positivo, de manera de no llegar ni pasarse de 2. El primero que llega a 2 o se pasa, pierde.

b. A continuación se muestra una partida del juego. ¿Es cierto que no importa lo que sume el próximo jugador, porque ya pierde?




c. Si ese jugador suma 0,00007, ¿pierde o gana? ¿Quién ganará esa partida?

**72.** En la carpeta, escribí una expresión decimal finita y otra periódica entre $\frac{15}{33}$ y $\frac{16}{33}$.

**73.** Decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones.

a. No existen números racionales entre $4{,}01\widehat{6}$ y $4{,}01\widehat{7}$.

b. La primera fracción después de $\frac{1}{3}$ es $\frac{2}{3}$.

c. El número inmediatamente posterior a 31,67 es $31{,}6\widehat{7}$.

d. Existen infinitos números decimales no periódicos entre 20,38 y $20{,}3\widehat{8}$.

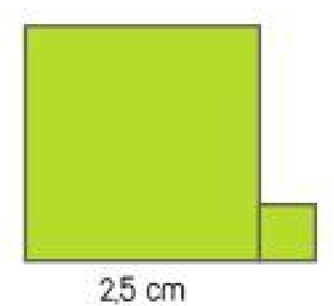
e. El número $1{,}1\widehat{9}$ es igual a 1,2.

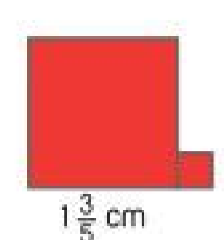
Una consecuencia de la propiedad de densidad es que no existe el número inmediatamente siguiente ni inmediatamente anterior de un número racional.



## Expresiones algebraicas

**74.** Estas figuras están formadas por dos cuadrados en las que el lado del cuadrado más chico es igual a la cuarta parte del lado del cuadrado más grande.




a. ¿Cuál es el perímetro de cada figura?

..................................................................................................

b. Calculá el perímetro de una figura similar a las anteriores pero en la que el lado del cuadrado grande sea de 67 cm.

..................................................................................................

c. ¿Es posible construir una figura como las anteriores en la que el perímetro sea 263,25 cm? Si es posible, ¿cuál es la longitud del lado del cuadrado grande? Si no es posible, explicá por qué.

..................................................................................................

..................................................................................................

d. Escribí una fórmula que permita calcular el perímetro de cualquier figura similar a las anteriores a partir de la medida del lado del cuadrado grande.

..................................................................................................



**75.** Se construyen rectángulos cuya altura es igual a $\frac{3}{5}$ de la base.

a. En la carpeta, hallá el perímetro de uno de esos rectángulos con base de 56 cm.

b. ¿Cuál es el perímetro si la base mide 23,5 cm? ¿Y si mide $\frac{1}{4}$ cm?

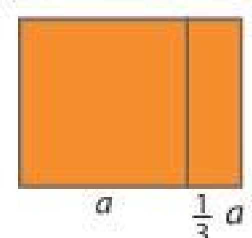
c. ¿Es posible que uno de esos rectángulos tenga un perímetro de 144,64 cm?

d. Encontrá una fórmula que permita calcular el perímetro de esos rectángulos en función de *b*, que es la medida de la base.

e. Para calcular el perímetro de esos rectángulos en función de la medida de la base, Valeria escribió esta fórmula: Perímetro = $\frac{16 \cdot b}{5}$. ¿Es correcta?

Las expresiones $\frac{16 \cdot b}{5}$, $\frac{16}{5}\,b$, $\frac{1}{5} \cdot 16\,b$ y $16 \cdot \frac{b}{5}$ son expresiones equivalentes.

**76.** Se construyen figuras formadas por un cuadrado de lado *a* y un rectángulo de base igual a $\frac{1}{3} \cdot a$ y altura *a*. Indicá cuáles de estas fórmulas permiten calcular el perímetro de las figuras en función de *a*.




$P = (a + \frac{1}{3}a) \cdot 2 + a \cdot 2$

$P = 4\frac{2}{3} \cdot a$

$P = \frac{14}{3} \cdot a$

$P = (a + \frac{1}{3}) \cdot 2 + 2 \cdot a$

**77.** Decidan en grupos si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifíquenlo.

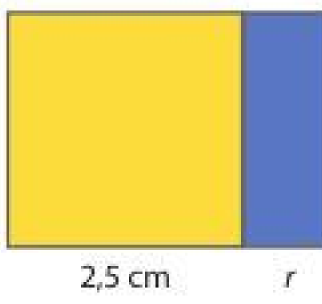
a. Las expresiones $5{,}4\,n$ y $2{,}4\,n + 3\,n$ son equivalentes.

b. La igualdad $-\frac{7}{2}a + \frac{4}{7}a = -\frac{41}{14}a$ es verdadera para cualquier valor de $a$.

c. La expresión $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}x$ es igual a la expresión $\frac{5}{9}x$ para cualquier valor de $x$.

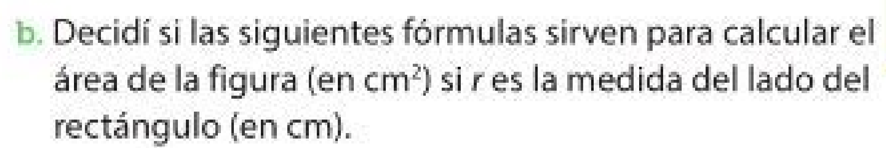
Dos expresiones son **equivalentes** si se obtiene el mismo resultado para cualquier valor que tomen las variables.

**78.** La figura está formada por un cuadrado de 2,5 cm de lado y un rectángulo de lado variable $r$.



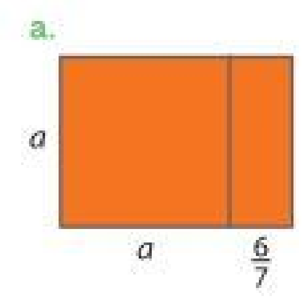


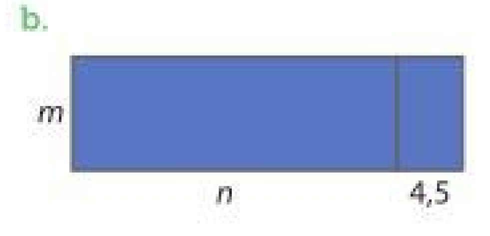
a. ¿Cuál es el área de la figura si $r = 12$ cm?

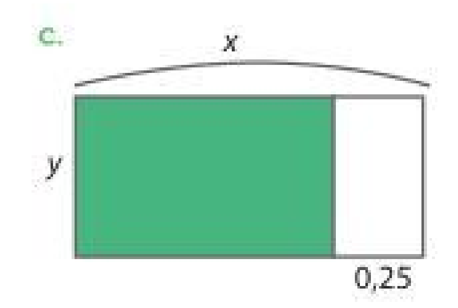

b. Decidí si las siguientes fórmulas sirven para calcular el área de la figura (en cm²) si $r$ es la medida del lado del rectángulo (en cm).

Área $= 6{,}25 + r^2$ Área $= 2{,}5 \cdot r + 6{,}25$ Área $= (2{,}5 + r) \cdot 2{,}5$

**79.** En estas figuras, algunos lados tienen una medida fija y otros pueden variar. Las medidas variables se indican con letras. Para cada una de las figuras, escribí dos fórmulas que permitan calcular el perímetro de la figura sombreada y dos que permitan calcular el área.

a.



b.



c.


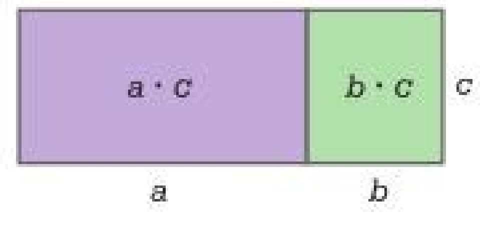

**80.** Decidí si las siguientes afirmaciones son ciertas.

a. Las expresiones $3 \cdot \left(\frac{1}{5}b + \frac{1}{4}\right)$ y $\frac{3}{5}b + \frac{3}{4}$ son equivalentes.

b. $\left(\frac{4}{9} + a\right) \cdot \frac{5}{7} = \frac{4}{9} + a \cdot \frac{5}{7}$ para cualquier valor de la variable $a$.

En las actividades anteriores estudiaron que se puede calcular el área de un rectángulo como el de la figura de dos maneras diferentes:

Área $= a \cdot c + b \cdot c$ Área $= (a + b) \cdot c$.




Esto permite concluir que si $a$, $b$ y $c$ representan la longitud de cualquier segmento, resulta que $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
Esta es la **propiedad distributiva del producto respecto a la suma**.
Si bien el argumento anterior con los rectángulos explica por qué la propiedad es válida cuando los números son positivos, en general vale si $a$, $b$ y $c$ son números racionales, tanto positivos como negativos.

En el caso de la resta, se cumple que si $a$, $b$ y $c$ son números racionales, resulta que: $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

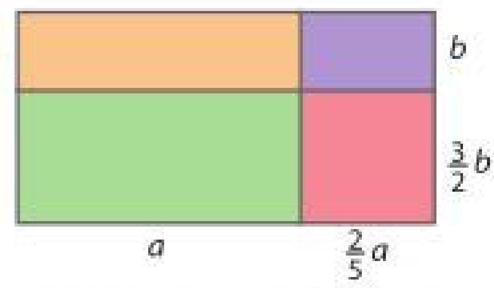
**81.** Este rectángulo está formado por 4 rectángulos en los que $x$ e $y$ representan medidas variables.




a. Escribí una fórmula para calcular el área de cada uno de los cuatro rectángulos.

b. Escribí una fórmula para calcular el área del rectángulo total.

**82.** Esta figura está compuesta por 4 rectángulos en los que $a$ y $b$ representan medidas variables.




a. Expliquen por qué estas fórmulas permiten calcular el perímetro de la figura.

$\frac{7}{5} \cdot a \cdot 2 + \frac{5}{2} \cdot b \cdot 2$ $\qquad$ $a \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot b \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot a \cdot 2 + b \cdot 2$

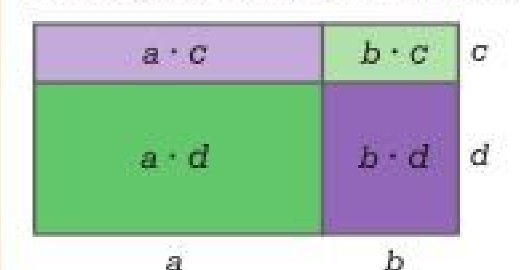
$(a + b) \cdot 2 + \left(\frac{2}{5} \cdot a + \frac{3}{2} \cdot b\right) \cdot 2$

b. Expliquen por qué estas fórmulas permiten calcular el área de la figura.

$\left(a + \frac{2}{5}a\right) \cdot \left(b + \frac{3}{2}b\right)$ $\qquad$ $\frac{7}{5} \cdot a \cdot \frac{5}{2} \cdot b$

$a \cdot b + a \cdot \frac{3}{2}b + \frac{2}{5}a \cdot b + \frac{2}{5}a \cdot \frac{3}{2}b$ $\qquad$ $\left(a + \frac{2}{5}a\right) \cdot \frac{3}{2}b + \left(a + \frac{2}{5}a\right) \cdot b$

En la actividad anterior estudiaron que se puede calcular el área de un rectángulo como el de la siguiente figura de diferentes maneras.




Área $= (a + b) \cdot (c + d)$

Área $= a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

De este modo se puede concluir que las dos fórmulas son equivalentes:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Esta propiedad se conoce como **doble distributiva** y se cumple si $a$, $b$, $c$ y $d$ representan la longitud de cualquier segmento. En general, esta propiedad vale para $a$, $b$, $c$ y $d$ números racionales cualesquiera.

**83.** En cada caso, decidí si las expresiones son equivalentes.

a. $\left(x + \frac{z}{7}\right) \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}z\right)$ $\qquad$ $\frac{1}{40}x - \frac{31}{70}z$

b. $\dfrac{6{,}4 - \frac{5}{3} \cdot a}{8}$ $\qquad$ $\frac{4}{5} \cdot \left(1 - \frac{25}{96} \cdot a\right)$

**84.** Escribí una expresión equivalente a cada expresión algebraica.

a. $\frac{2}{5} \cdot (x + 5) - \frac{3}{11} \cdot \left(15 - \frac{3}{5}x\right)$

b. $\left(\frac{1}{6}x - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{7} - x\right)$

c. $\dfrac{(2a - 3) \cdot (4a + 1)}{6} - 4a \cdot \left(\frac{1}{3}a + \frac{3}{7}\right)$

d. $\left(\frac{3}{7}a - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{8}{3}a\right)$

# Más actividades

**1.** Resolvé sin utilizar la calculadora.

a. $45 : \left(\frac{1}{4} - \frac{3^2}{6}\right)$

b. $\left[\frac{2}{5} : \left(\frac{5}{3} - 1\right)\right]^{-3}$

c. $\left(0{,}3 \cdot \frac{1}{3}\right)^{-3} - \left[-\frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

d. $(-0{,}75) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{13}{8} : \frac{1}{24}$

e. $0{,}5^{17} \cdot 2^{17}$

f. $\left(\frac{7}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{15} : \left[\left(\frac{7}{5}\right)^2\right]^{13}$

**2.** Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones explicando qué conocimientos y propiedades usaste.

a. El resultado de $-\frac{67}{10} - \frac{34}{10}$ tiene una expresión decimal con dos cifras distintas de 0.

b. El resultado de $0{,}35 \cdot \frac{72}{5}$ es menor que $\frac{72}{5}$.

c. Las expresiones $(3 \cdot b)^3$ y $3 \cdot b^3$ son equivalentes para cualquier valor de *b*.

d. Para cualquier valor de *a*, que es un número racional, resultan verdaderas las igualdades: $(-a)^6 = a^6$ y $(-a)^7 = a^7$.

**3.** En cada caso y sin hacer la cuenta, colocá <, > o = según corresponda. Explicá en tu carpeta qué conocimientos y propiedades usaste.

a. $\left(\frac{15}{23}\right)^8$ ............ $\left(\frac{15}{23}\right)^3$

b. $\left(\frac{3}{5}\right)^5 : \left(\frac{3}{5}\right)^9$ ............ $\left(\frac{3}{5}\right)^4$

c. $3{,}657^{12} \cdot 3{,}657^8$ ............ $3{,}657^{20}$

d. $\left(-\frac{7}{11}\right)^{-2}$ ............ $\left(-\frac{11}{7}\right)^3$

e. $\left(-\frac{2}{5}\right)^9$ ............ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-9}$

f. $\left(\frac{6}{5}\right)^{17} : \left(\frac{6}{5}\right)^{23}$ ............ 1

**4.** Resolvé las siguientes ecuaciones.

a. $\frac{9}{11} = n + 3\frac{2}{7}$

b. $3{,}4 - b = \frac{1}{3}$

c. $-0{,}0075 + x = 6{,}5$

d. $-\frac{3}{17} \cdot c = -\frac{2}{17}$

e. $11 \cdot m = -35$

f. $\frac{6}{3} \cdot s = -0{,}1$

g. $\frac{4}{3}a - \frac{7}{4}a = -\frac{6}{5}$

h. $\frac{5}{3}d - \frac{4}{7} = \frac{14}{6}$

i. $-\frac{8}{11}y + \frac{14}{6} = -\frac{15}{12}$

**5.** a. Escribí una fracción cuya expresión decimal sea finita. Sin mostrar su expresión decimal, explicá por qué tiene una expresión decimal finita.

b. Escribí una fracción cuya expresión decimal sea periódica. Sin mostrar su expresión decimal, explicá por qué tiene una expresión decimal periódica.

c. Escribí una fracción mayor que 34 cuya expresión decimal sea finita. Explicá cómo la encontraste.

d. Escribí una fracción entre 35 y 36 cuya expresión decimal sea periódica. Explicá cómo la encontraste.

**6.** Completá la siguiente tabla.

| Expresión fraccionaria | $\frac{5}{7}$ | | $\frac{45}{11}$ | | | $\frac{79}{625}$ | $\frac{64}{70}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Expresión decimal | | $4{,}1\overset{\frown}{87}$ | | $52{,}0\overset{\frown}{77}$ | $0{,}000\overset{\frown}{731}$ | | | $138{,}00\overset{\frown}{5}$ |

**7.** Sin hacer la cuenta de dividir, establecé cuáles de estas fracciones tienen una expresión decimal finita y cuáles tienen una expresión decimal periódica. En cada caso, justificá tu respuesta.

a. $\frac{36}{45}$

b. $-\frac{9}{14}$

c. $\frac{14}{21}$

d. $\frac{1}{12}$

**8.** a. Escribí dos números de siete cifras decimales que, al truncarlos a cuatro cifras, den 0,4287.

b. Escribí dos números de siete cifras decimales que, al redondearlos a cuatro cifras, den 0,9031.

**9.** En cada uno de estos pares de expresiones, indicá cuál es mayor, sin escribir su expresión decimal. Explicá cómo lo pensaste.

a. $\frac{3}{5}$ ............ $\frac{5}{7}$ b. $-\frac{2}{7}$ ............ $-\frac{8}{9}$ c. $\frac{3}{11}$ ............ $\frac{15}{9}$

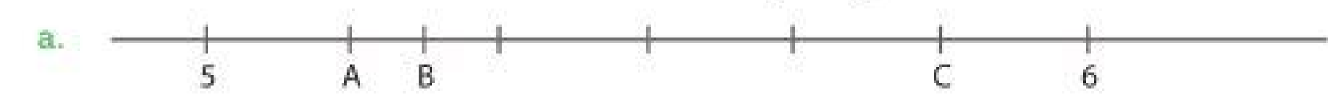
**10.** a. En la siguiente recta numérica están ubicados los números 0, $a$ y $b$.




b. Ubicá los números $-\frac{b}{3}$ y $\frac{a}{2}$.

**11.** En cada una de las rectas, determiná el número que representa cada letra.

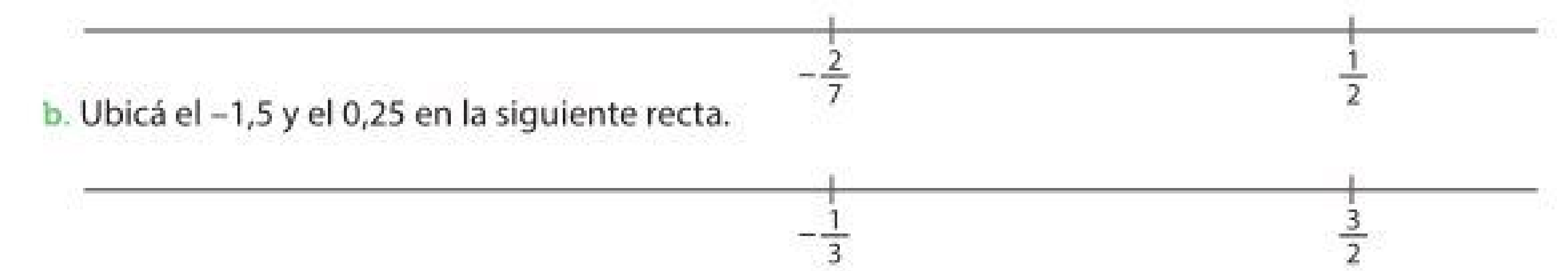
a.




b.

−8 A B −7

**12.** a. Ubicá el −1 y el $-\frac{1}{5}$ en la siguiente recta.




b. Ubicá el −1,5 y el 0,25 en la siguiente recta.

**13.** Escribí todas las fracciones con denominador 7 que se encuentran entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{5}$.

**14.** a. ¿Cuántas fracciones con denominador 15 hay entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{4}{5}$? ¿Y con denominador 30?

b. Si se permite cualquier denominador, ¿cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{4}{5}$?

c. ¿Cuántas fracciones con denominador 4 hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{6}{5}$? ¿Y con denominador 8?

**15.** Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones.

a. La primera fracción después de $\frac{5}{4}$ es $\frac{6}{4}$.

b. Existen infinitas fracciones con denominador 10 entre 3,5 y 3,8.

c. No existen números racionales entre $5{,}0\overset{\frown}{2}$ y $5{,}0\overset{\frown}{3}$.

**16.** Encontrá una expresión equivalente a cada una de las que se dan a continuación, de modo que sea lo más reducida posible.

a. $\frac{1}{6}x - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{7} - x\right)$

b. $\left(\frac{x}{3} + \frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{6}x\right)$

c. $\frac{6b + 4}{5} + (0{,}25 - 1{,}2\,b) \cdot (b + 2{,}1)$

d. $\frac{1}{9}y - \frac{2}{5} \cdot \left(3x - \frac{5}{4}\right) + \frac{5}{7}$




**Variación uniforme:** lectura y producción de tablas, gráficos y fórmulas. **Función lineal.**

# Funciones lineales

**1.** En la sucursal de Santa Rosa de la empresa Envíos Rápidos y Seguros (ERS) se observan los siguientes afiches, en los que anuncian promociones para el envío de encomiendas. Martín vive en Santa Rosa y quiere mandarle a su hermano, que estudia en Córdoba, una caja con los apuntes de la facultad que ya no usa.

> **Promo Clásica**
>
> Precio por envío de encomienda a cualquier parte del país: $45 por kg.
>
> Llega en 5 días hábiles.

> **Promo Rápida**
>
> Precio por envío a cualquier parte del país: $500 para cualquier peso.
>
> ¡Llega en el día!

a. ¿Qué promoción le recomendarías a Martín si la encomienda pesa 8 kg y no le importa el tiempo que tarda en llegar? Explicalo en la carpeta.

b. Si a último momento Martín decide agregar a la encomienda algunos libros que pesan 7 kg, ¿le siguirías recomendando lo mismo? Explicá por qué.

# Funciones de variación uniforme

**2.** Florencia quiere enviarle un paquete que pesa 23 kg a una compañera de la secundaria que se fue a vivir a España. Para hacer ese tipo de envíos internacionales, la empresa ERS cobra un monto fijo y un valor por cada kilogramo que pesa la encomienda. Como Florencia sabe que varios amigos hicieron envíos con la misma empresa, les escribe un mensaje de texto para preguntarles cuánto tuvieron que pagar y cuánto pesaba la encomienda. Con las respuestas, Florencia armó la siguiente tabla y se las mandó a sus amigos por correo electrónico preguntándoles si saben cómo calcular cuánto tendría que pagar ella por la encomienda de 23 kg.

| | Pato | Lola | Fede | Guille | Juan | Andrea |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Peso de la encomienda (en kg) | 4 | 8 | 12 | 15 | 20 | 25 |
| Monto pagado (en $) | 445 | 685 | 925 | 1.105 | 1.405 | 1.705 |

a. Decidí si algunas de las siguientes estrategias que recibió Florencia son correctas para saber cuánto tendría que pagar.

Juan
Guille mandó 15 kg y pagó $1.105. Lola mandó 8 kg y pagó $685. Entonces te van a cobrar $1.105 + $685 = $1.790, porque 15 + 8 es 23.

Lola
Si mirás los tres primeros valores de la tabla, se ve que por cada 4 kg más de peso, se paga $240 más. Entonces, al hacer 240 : 4, que da 60, sabés que están cobrando $60 por kilo. Como Juan pagó $1.405 por 20 kg, le sumamos 3 · $60 = $180 y te da $1.585. Eso es lo que vas a tener que pagar.

Fede
Si ves lo que le cobraron a Lola por 8 kg y a mí por 12 kg, vas a darte cuenta de que tuve que pagar $240 por los 4 kg de más que yo mandé. Eso quiere decir que cada kg más que envié me costó $240 : 4 = $60. Si tomamos lo que pagó Andrea por 25 kg, le tenés que restar 2 × $60 = $120.

Andrea
Pato mandó una encomienda de 4 kg y pagó $445. Entonces, por 1 kg te cobran $445 : 4 = $111,25. Eso quiere decir que por 23 kg de encomienda vas a tener que pagar $111,25 × 23 = $2.558,75.

..........

b. ¿Qué otra estrategia podés usar para calcular el monto a pagar por la encomienda que quiere enviar Florencia?

..........

c. ¿Cuánto le cobrarían a Florencia si la encomienda pesara 9,5 kg?

..........

d. ¿Cuál es el monto fijo y cuál es el precio por kilogramo?

..........

**3.** María encendió una vela y a los diez minutos de hacerlo se preguntó cuánto tiempo tardaría en consumirse completamente. Ella sabe que las velas se consumen en forma pareja; midió la altura de la vela en varios momentos y lo registró en esta tabla. Resolvé las consignas en la carpeta.

| Tiempo desde que María encendió la vela (en minutos) | 10 | 18 | 34 | 42 |
|---|---|---|---|---|
| Altura de la vela (en cm) | 14 | 13,2 | 11,6 | 10,8 |

a. ¿Es cierto que a los 20 minutos la altura de la vela era de 13 cm?

b. ¿Cuál era la altura de la vela a los 30 minutos de haberla encendido?

c. ¿Se puede saber cuánto medía la vela en el momento en que María la encendió? ¿Y un minuto después?

d. ¿Cómo pudo hacer para saber en cuánto tiempo se iba a consumir la vela?

e. Calculá la altura de la vela a los 62,5 minutos. Escribí las cuentas que hacés.

f. Decidí cuáles de estas fórmulas permiten calcular la altura de la vela (en cm) cuando pasaron *x* minutos desde que María la encendió.
$15 + 0{,}1 \cdot x$ $\quad -0{,}1 \cdot (x - 10) + 14$ $\quad 0{,}1 \cdot x + 15$ $\quad -0{,}1 \cdot x + 15$ $\quad -0{,}1 \cdot x + 14$

**4.** La noche siguiente, María encendió una vela más delgada y armó esta tabla.

| Tiempo desde que María encendió la vela (en minutos) | 8 | 16 | 24 |
|---|---|---|---|
| Altura de la vela (en cm) | 10,5 | 6,5 | 2,5 |

a. Calculá la altura que tenía la vela al minuto de haber sido encendida.

b. ¿Cuánto disminuyó la altura de la vela en un minuto?

c. Escribí una fórmula $V(x)$ que permita calcular la altura de la vela en función de la cantidad *x* de minutos que pasaron desde que fue encendida.

d. ¿Cómo podés usar la fórmula para calcular la altura inicial de la vela?

e. ¿Cuál era la altura de la vela a los 3,5 minutos de haber sido encendida?

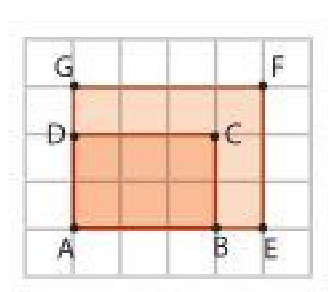
Las funciones de las actividades anteriores verifican que si se aumenta la variable independiente una cantidad fija, la variable dependiente también varía una cantidad fija. Por eso, ese tipo de funciones se llaman **funciones de variación uniforme**. En la actividad 2, por cada 4 kg más en el peso del paquete, el costo del envío aumenta $240, y la misma regularidad ocurre al aumentar otras cantidades de kilogramos.

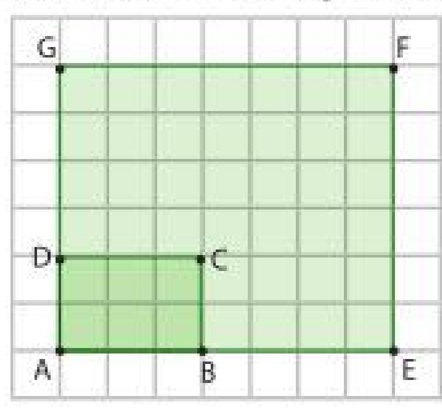
| | + 4 | + 4 | | + 5 | + 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Peso de la encomienda (en kg) | 4 | 8 | 12 | 15 | 20 | 25 |
| Monto pagado (en $) | 445 | 685 | 925 | 1.105 | 1.405 | 1.705 |
| | + 240 | + 240 | | + 300 | + 300 | |

En la actividad 3, la altura de la vela disminuye 0,8 cm cada 8 minutos.

**5.** Decidan en parejas cuáles de las funciones que estudiaron en el capítulo 4 son de variación uniforme. Expliquen sus decisiones en la carpeta.

**6.** ABCD es un rectángulo con lados AB de 1,5 cm y AD de 1 cm. Se quieren construir rectángulos AEFG agregando la misma longitud a los cuatro lados. Estos son dos ejemplos de los rectángulos que se quieren construir. En el primero, los segmentos BE y DG miden 0,5 cm; en el segundo, miden 2 cm.




a. Calculá el perímetro y el área de los rectángulos AEFG de los ejemplos.

b. Completá las siguientes tablas.

| Longitud del segmento BE (en cm) | 0 | 2 | 4 | 10 | 15 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P = Perímetro del rectángulo AEFG (en cm) | | | | | | 85 |

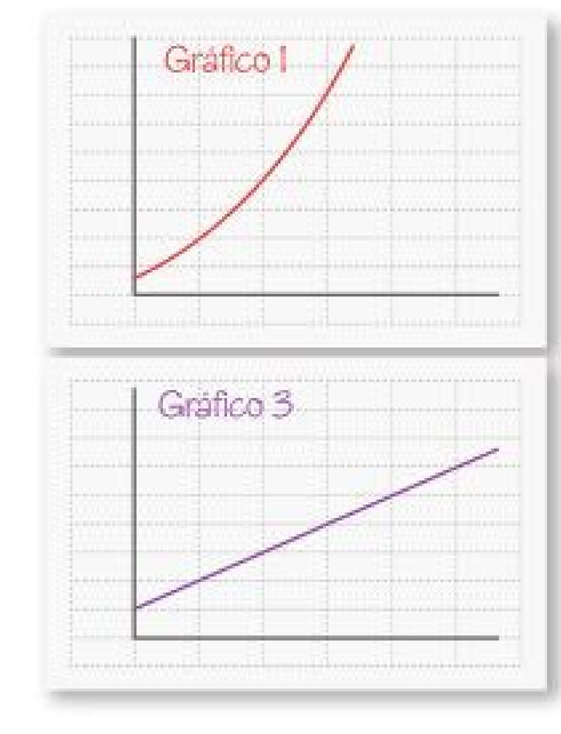
| Longitud del segmento BE (en cm) | 0 | 2 | 4 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A = Área del rectángulo AEFG (en $cm^2$) | | | | | | |

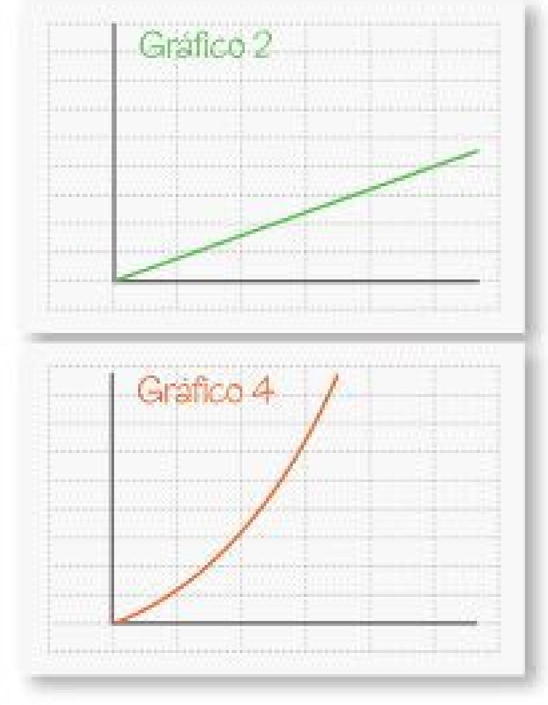
c. En la carpeta, estudiá si A y P son funciones de variación uniforme.

d. Escribí una fórmula para P(*x*) que permita calcular el perímetro del rectángulo AEFG en función de la longitud *x* del segmento BE.

e. Escribí una fórmula para A(*x*) que permita calcular el área del rectángulo AEFG en función de la longitud *x* del segmento BE.

f. Decidí cuáles de estos gráficos pueden representar a P(*x*) y cuáles a A(*x*).



**7.** a. En parejas, usen el programa GeoGebra para hacer el gráfico de la función P(*x*) de la actividad 6. Para hacerlo, escriban la fórmula en la barra de entrada.

b. Comparen el gráfico que hicieron con el que eligieron en la última consigna de la actividad anterior.

c. ¿Qué significa, en el contexto del perímetro de las figuras, el punto donde el gráfico corta al eje *y*? ¿Cómo se obtienen sus coordenadas usando la fórmula?

d. Sigan estas instrucciones en el archivo de GeoGebra donde hicieron el gráfico.

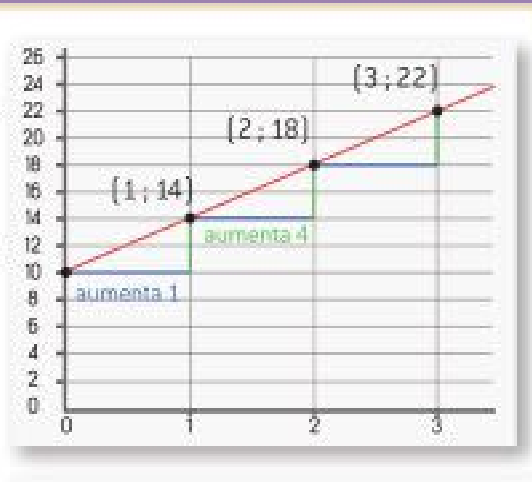
1. En la barra de entrada, escribir las coordenadas de un punto A que esté sobre el eje x y luego las coordenadas de un punto B que esté sobre el eje x y su abscisa sea una unidad mayor. Por ejemplo, si eligen A = (2 ; 0), entonces B = (3 ; 0).
2. Usar la herramienta Recta paralela para construir la recta paralela al eje y que pasa por A.
3. Con la herramienta Punto, definir un punto (C) en la intersección de la nueva recta y el gráfico de la función.
4. Usar la herramienta Recta paralela para construir la recta paralela al eje y que pasa por B.
5. Con la herramienta Punto, definir un punto (D) en la intersección de la última recta y el gráfico de la función.

e. Calculen la diferencia entre la ordenada del punto D y la del punto C mirando sus coordenadas en la Vista algebraica.

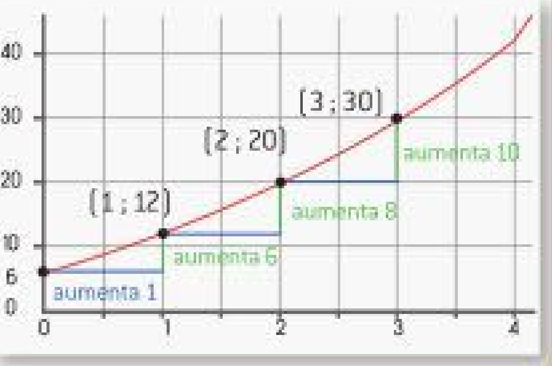
f. Comparen el resultado que obtuvieron en la consigna anterior con el que obtuvieron otros compañeros.

Es probable que para ver el gráfico tengan que cambiar la escala del eje *y*. Para hacerlo, utilicen la herramienta "Desplaza vista gráfica", hagan clic sobre el eje vertical y arrastren el mouse sin soltar el botón.

Como vieron antes, una función es de variación uniforme si por cada aumento fijo de la variable independiente le corresponde una variación fija de la variable dependiente. En la actividad 7, P(*x*) aumenta 4 cm por cada aumento de 1 cm en *x*. Esta característica se refleja en el gráfico, que es una línea recta. Por eso, esas funciones se llaman **funciones lineales**.




Si una función no es de variación uniforme, al aumentar una unidad sobre distintos valores de x, las variaciones sobre *y* son diferentes. Por esto, su gráfico no es una recta. En la actividad 6, la función A(*x*) no es de variación uniforme.



## Pendiente de una función lineal

**8.** La empresa que suministra el servicio eléctrico de un pueblo cobra a los usuarios residenciales un cargo fijo y un valor por cada kilowatt-hora (kwh) consumido. Esta tabla relaciona el monto de tres facturas de electricidad correspondientes al mes de mayo de 2016.

| | Usuario 1 | Usuario 2 | Usuario 3 |
|---|---|---|---|
| Energía consumida (en kwh) | 50 | 110 | 300 |
| Monto pagado (en $) | 55 | 85 | 180 |

a. ¿Cuál es el precio por cada kwh? ..........

b. Escribí una fórmula para la función M(*x*), que es el monto de la factura (en $) para *x* cantidad de energía consumida (en kwh).

..........

c. Usá la fórmula para calcular el monto a pagar por un consumo de 100 kwh.

..........

d. En tu carpeta, hacé el gráfico cartesiano de la función M(*x*).

e. ¿En qué lugar del gráfico puede verse cuál es costo fijo que cobra la empresa? ¿Cómo lo calculás usando la fórmula de M(*x*)?

..........

f. ¿Podés mostrar en el gráfico el precio por kwh que cobra la empresa?

..........

g. Si un usuario recibió una factura por $200, ¿cuál fue su consumo durante ese mes? Explicá cómo lo podés ver en el gráfico de M(*x*) y cómo lo podés comprobar usando la fórmula de M(*x*).

..........

El kilowatt-hora es una unidad que se usa para medir la cantidad de energía. Por ejemplo, algunas computadoras consumen 0,72 kwh por cada hora de funcionamiento, aproximadamente, y un lavarropas automático consume 0,18 kwh por cada hora de funcionamiento, también aproximadamente.



Se llama **pendiente** de una función lineal H(*x*) a la variación producida en la variable dependiente de H cuando *x* aumenta 1 unidad. Algunos ejemplos de las actividades anteriores son los siguientes.

- La función P(*x*) de la actividad 7 tiene pendiente 4, porque cada 1 cm que aumenta la base del rectángulo, el perímetro aumenta 4 cm.
- En la actividad 4, por cada minuto que pasaba, la vela tenía 0,5 cm menos, entonces la función V(*x*) tiene pendiente –0,5.
- La función M(*x*) de la actividad 8 tiene pendiente 0,5, porque el monto aumenta $0,5 por cada kwh que se consume.

Cuando la función es creciente, como M(*x*), la pendiente es un número positivo; cuando la función es decreciente, como V(*x*), la pendiente es un número negativo.




## Fórmulas y gráficos

**9.** Calculá la pendiente de las funciones que encontraste en las actividades 2 y 3. Explicá qué significado tiene cada una.

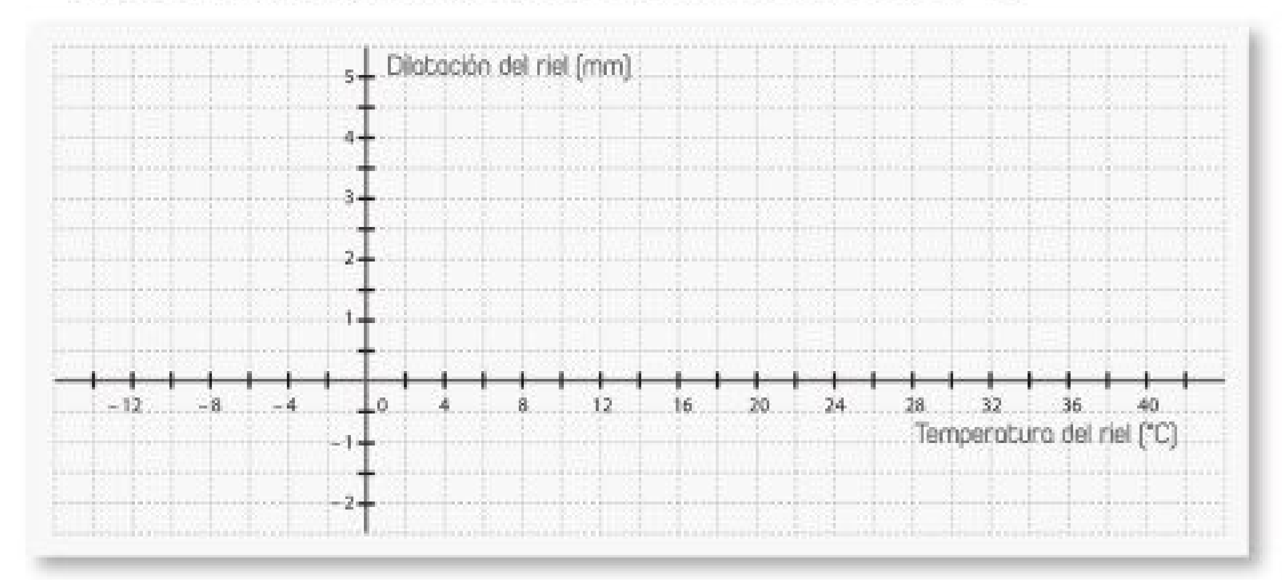
..........

..........

**10.** Pedro trabaja en el ferrocarril, controlando el estado de los rieles. Sabe que el metal se dilata uniformemente con el calor y usa esta tabla.

| Temperatura del riel (en °C) | −12 | 8 | 20 | 32 |
|---|---|---|---|---|
| Dilatación del riel (en mm) | −1,5 | 1 | 2,5 | 4 |

a. Usá la tabla para hacer el gráfico cartesiano de la función D($x$), que es la dilatación del riel (en mm) cuando su temperatura es $x$ (en °C).




b. Si la temperatura del riel es de 40 °C, ¿es cierto que su dilatación es de 5 mm? Usá el gráfico para responder.

..........

c. ¿Cuál es la dilatación del riel si su temperatura es de 30 °C? ..........

d. Si el riel se dilata 3 mm, ¿cuál es su temperatura? ..........

e. ¿Se puede saber a qué temperatura el riel no se dilata ni se comprime?

..........

f. Calculá la pendiente de la función D($x$).

..........

g. Decidí cuáles de estas fórmulas pueden corresponder a D($x$).

$-\frac{1}{8}x$ $\frac{1}{8}x - 1{,}5$ $\frac{1}{8}x$ $-\frac{1}{8}x - 1{,}5$ $8x$

h. Explicá cómo podés usar la fórmula para responder las consignas anteriores.

..........

..........




**11.** a. En parejas, escriban una fórmula para la función lineal de la actividad 2, E(*x*), que es la cantidad de dinero a pagar (en $) por enviar una encomienda a España cuyo peso es *x* (en kg).

..........................................................................................................

b. Grafiquen la función usando GeoGebra.

c. Si R(*x*) es la función correspondiente a otra empresa de encomiendas que cobra un monto fijo mayor que el de E(*x*), pero el mismo precio por kilogramo a enviar, ¿qué diferencia habrá entre el gráfico de R(*x*) y el de M(*x*)?

..........................................................................................................

d. Escriban una fórmula para una posible función R(*x*) de la consigna anterior.

..........................................................................................................

e. Realicen el gráfico de la función R(*x*). Háganlo en el mismo archivo de GeoGebra que contiene el gráfico de E(*x*). Luego, verifiquen que R(*x*) cumpla lo pedido en la tercera consigna.

f. Si Q(*x*) es la función correspondiente a una empresa que cobra el mismo monto fijo que E(*x*), pero menos por kilogramo a enviar, ¿qué diferencia habrá entre el grafico de Q(*x*) y el de E(*x*)?

..........................................................................................................

g. Escriban una fórmula para una posible función Q(*x*) de la consigna anterior.

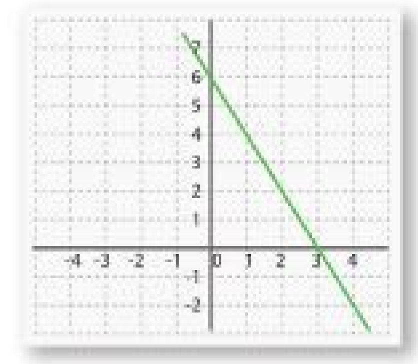
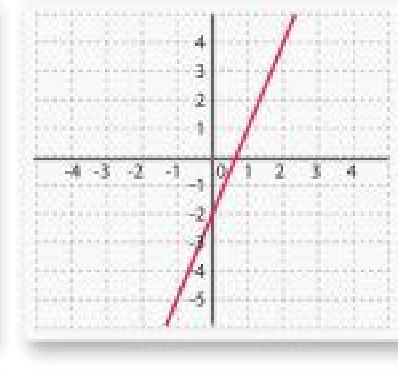
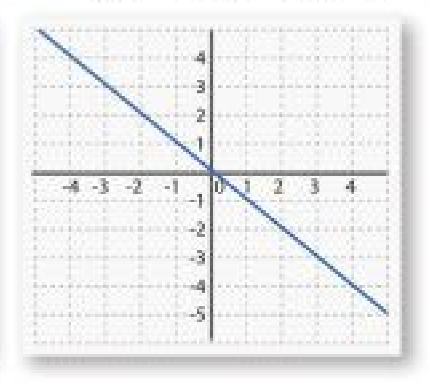
..........................................................................................................

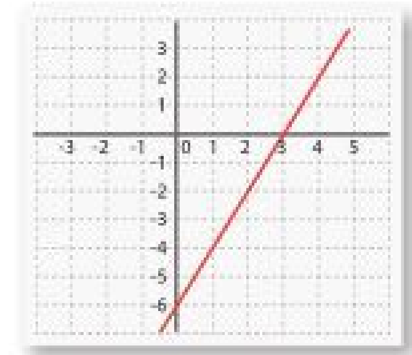
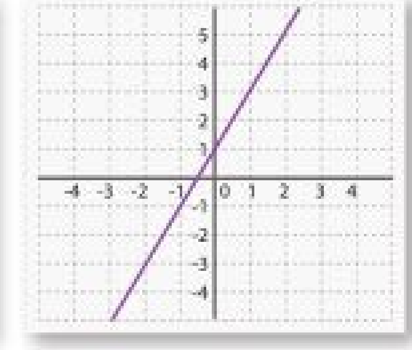
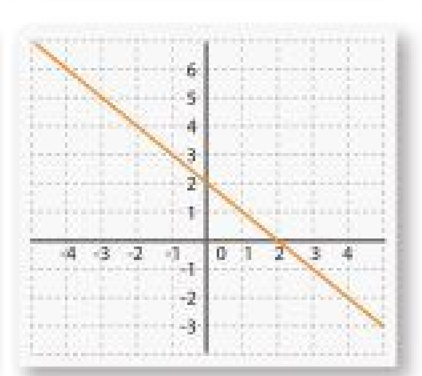
h. Realicen el gráfico de la función Q(*x*). Háganlo en el mismo archivo de GeoGebra que usaron antes. Luego, verifiquen que Q(*x*) cumpla lo pedido.

**12.** Decidí qué gráfico corresponde a cada fórmula. Justificá tu decisión en la carpeta.

$A(x) = 2x + 1$ $\quad$ $B(x) = 2 \cdot (x - 3)$ $\quad$ $C(x) = -x + 2$

$D(x) = -x$ $\quad$ $E(x) = -2 \cdot (x - 3)$ $\quad$ $F(x) = 3 \cdot (x - 1) + 1$

**13.** Micaela y sus compañeros organizan una rifa para recaudar dinero para el viaje de egresados. Como premio, quieren comprar una guitarra que cuesta \$2.520 y piensan vender cada rifa a \$12.

a. ¿Cuánto dinero ganarían si vendieran 300 rifas? ..........

b. Escribí una fórmula para la función G($x$) que relacione la cantidad de dinero (en \$) que ganarían con la cantidad $x$ de rifas vendidas.

..........

c. Hacé el gráfico de G($x$) en tu carpeta o usando GeoGebra.

d. ¿Cuál sería la ganancia si no se vendiera ninguna rifa? ¿Cómo te das cuenta mirando el gráfico? ¿Y usando la fórmula?

..........

e. ¿Cuántas rifas tienen que vender para recuperar el precio de la guitarra? Explicá cómo te das cuenta mirando el gráfico y cómo usando la fórmula.

..........

f. Si el objetivo es recaudar \$12.000, ¿cuántas rifas deberán vender, como mínimo? Explicá cómo usás el gráfico y la fórmula para responder.

..........

g. Micaela dice que, como mucho, van a vender 500 rifas y propone cambiar el precio. ¿Cuál puede ser el precio para que ganen \$12.000 o más vendiendo 500 rifas? Escribí la fórmula y hacé el gráfico de G($x$) para ese caso.

..........

**14.** Flor, una compañera de Micaela, dice que hay que mantener el precio de cada rifa en \$12 y cambiar el premio por un reproductor de dvd de \$504. Diego dice que el premio tiene que ser la guitarra de \$2.520, pero que las rifas deben costar \$20. En parejas, decidan cuáles de las fórmulas pueden representar la ganancia obtenida con cada propuesta, siendo $x$ la cantidad de rifas vendidas.

$G_1(x) = 504\,x - 12$ $G_2(x) = 12\,x - 504$ $G_3(x) = 20 \cdot (x - 126)$

$G_4(x) = 20\,x - 2.520$ $G_5(x) = 20 \cdot (x - 2.520)$ $G_6(x) = 12 \cdot (x - 42)$

..........

..........

La fórmula de cualquier función lineal se puede escribir de la forma: $F(x) = a \cdot x + b$, en la que $a$ y $b$ son dos números cualesquiera. Resulta que $a$ es la pendiente de la función y $b$ es F(0), también llamada **ordenada al origen**, ya que (0 ; $b$) es el punto donde el gráfico de F corta al eje $y$. Además, si consideramos el valor $c$ en el que $F(x) = 0$, la fórmula de F se puede expresar como $F(x) = a \cdot (x - c)$. El valor $c$ se llama **cero** o **raíz** de la función, y el punto ($c$ ; 0) es el punto donde el gráfico corta al eje $x$. Por ejemplo, en la actividad anterior, la fórmula $G_3(x) = 20 \cdot (x - 126)$ muestra que, al vender 126 rifas, la ganancia es \$0.

# Funciones de proporcionalidad directa

**15.** El servicio rápido del tren que une las ciudades de Rosario y Córdoba viaja a una velocidad constante de 75 km/h y no para en ninguna estación intermedia. La distancia que recorre entre esas ciudades es de 435 km. Respondé en la carpeta.

a. ¿Cuánto recorre el tren luego de 15 minutos de viaje? ¿Y luego de 45 minutos?

b. ¿Cuántos kilómetros recorre en 1 minuto?

c. Escribí una fórmula para la función D(*x*) definida como la distancia recorrida (en km) luego de *x* minutos de viaje.

d. Realizá el gráfico cartesiano de D(*x*).

e. Para calcular D(110), Lola hizo D(40) + D(70). ¿Es correcto?

f. Para calcular D(75), ¿se puede hallar D(25) y multiplicarlo por 3?

g. ¿Cuánto tardará el tren en llegar a Córdoba? Explicá cómo podés averiguarlo usando el gráfico y cómo lo podés averiguarlo usando la fórmula.



**16.** En la vidriera de una cafetería de la ciudad de Mendoza hay un cartel que dice que $\frac{1}{4}$ kg de café molido cuesta $69.

a. Luciana compró 0,75 kg de café molido. ¿Cuánto pagó?

b. Marcelo compró café y pagó $103,5. ¿Cuánto compró?

c. Si Diana pagó el doble que Marcelo por el mismo tipo de café, ¿cuánto compró?

d. Escribí una fórmula para la función P(*x*), que es el monto a pagar por *x* kg de café molido.

e. ¿P(*x*) es lineal? Si es así, ¿cuál es su pendiente y qué significa ese número?

f. ¿Es verdad que para calcular P(2,5) se pueden sumar P(2) y P(0,5)?

En las actividades de esta página, las funciones lineales son especiales: en ellas la variable dependiente es directamente proporcional a la variable independiente, por eso se llaman **funciones de proporcionalidad directa**.
Cuando una función lineal F es de proporcionalidad directa, su pendiente se llama **constante de proporcionalidad** o coeficiente de proporcionalidad.
Si una función es de proporcionalidad directa, el gráfico cartesiano es una recta que pasa por el punto (0 ; 0).

**17.** a. Busquen cuáles de las funciones de las actividades anteriores de este capítulo son de proporcionalidad directa.

b. Escriban la constante de proporcionalidad de cada una y qué significado tiene esa constante en el contexto de cada situación.

## Estudio de funciones lineales sin contexto

**18.** Las fórmulas de dos funciones lineales son: $F(x) = \frac{3}{8}x - 4$ y $G(x) = -2x + 24{,}5$.

a. En grupos, indiquen si cada punto pertenece al gráfico de F o al de G.

| | (0 ; 4) | (24,5 ; –24,5) | (12 ; $\frac{1}{2}$) | (0 ; –4) | (16 ; 2) | (16 ; –7,5) | (0 ; 24,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gráfico de F | | | | | | | |
| Gráfico de G | | | | | | | |

b. Escriban un punto más que pertenezca al gráfico de F y otro que pertenezca al gráfico de G.

c. Escriban un punto que quede por arriba del gráfico de F y otro que quede por arriba del gráfico de G. Expliquen cómo lo pensaron.

**19.** Decidí si cada tabla puede corresponder a una función lineal. Justificalo.

| x | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| M(x) | 6 | 2,7 | –1 | –4,5 |

| x | –1 | 2 | 8 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| T(x) | 5 | –1 | –13 | –19 |

| x | –2 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| S(x) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{23}{8}$ | 4 |



**20.** Calculá las pendientes de las funciones lineales F, G y H, usando las tablas.

| x | –1 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|
| F(x) | 0 | 9 | 15 |

.........................................

| x | 0 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|
| G(x) | 2,5 | –1 | –15 |

.........................................

| x | –1 | 0 | 3 |
|---|---|---|---|
| H(x) | $\frac{7}{5}$ | 2 | $\frac{19}{5}$ |

.........................................

Si F es una función lineal y $a$ y $b$ son dos valores de la variable independiente tales que $a < b$, entonces, como la pendiente es la variación de la variable $y$ por cada aumento de una unidad en la variable $x$, esta se puede calcular haciendo: $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$.
Por ejemplo, en la actividad anterior, para calcular la pendiente de la función H, pueden considerarse $a = -1$ y $b = 3$ y hacer la cuenta:

$$\frac{H(3) - H(-1)}{3 - (-1)} = \frac{\frac{19}{5} - \frac{7}{5}}{4} = \frac{\frac{12}{5}}{4} = \frac{3}{5}$$

**21.** a. Escribí la fórmula de una función lineal cuyo gráfico pase por el punto (0 ; 3).

...........................................................................................................

b. Hacé el gráfico cartesiano de la función anterior en tu carpeta.

c. Escribí la fórmula de otra función lineal cuyo gráfico pase por el punto (0 ; 3).

...........................................................................................................

d. Hacé el gráfico cartesiano de la función anterior en el mismo sistema de ejes donde graficaste la primera función.

e. Escribí la fórmula de una función lineal que pase por el punto (0 ; 3) y cuyo gráfico quede entre los gráficos de las dos funciones anteriores.

...........................................................................................................

f. ¿Podés afirmar, sin trazar el gráfico de la última función, que este va a quedar entre los dos anteriores?

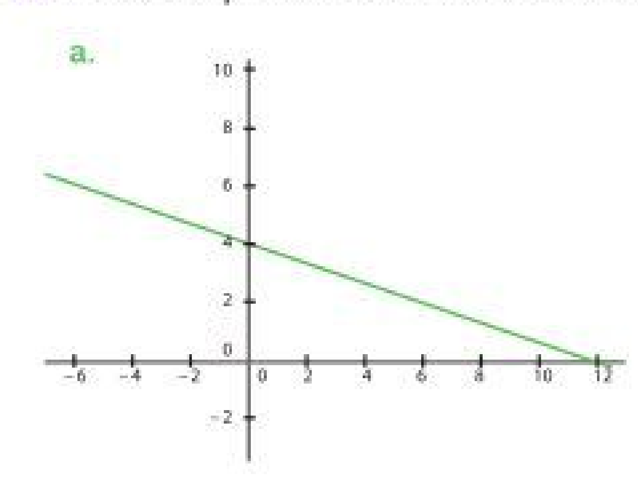
...........................................................................................................

g. Escribí la fórmula de una función lineal cuyo gráfico pase por el punto (0 ; 3) y que tenga pendiente igual a –3.

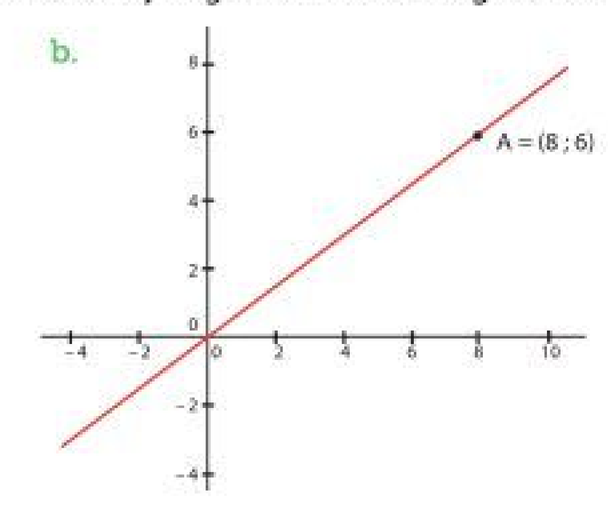
...........................................................................................................

**22.** Calculá la pendiente de las funciones lineales cuyos gráficos son los siguientes.

a.

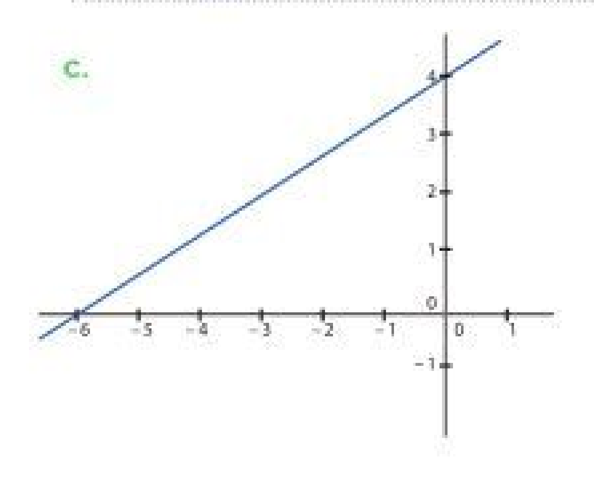


b.

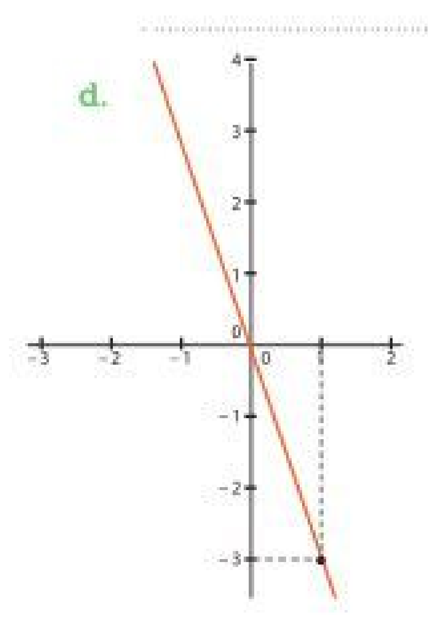



...................................... ......................................

c.



d.

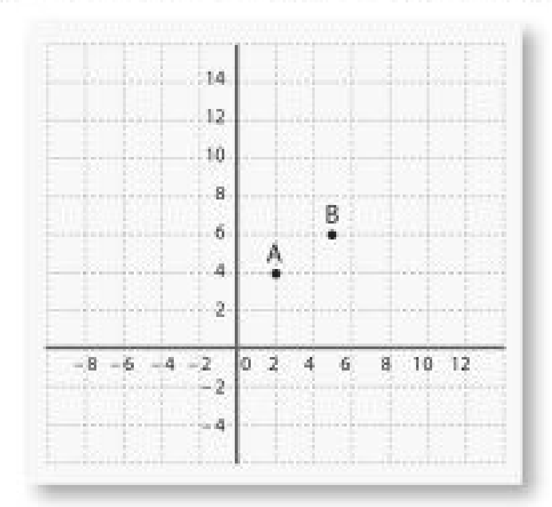


...................................... ......................................




# Puntos alineados

**23.** En este sistema de ejes coordenados se marcaron los puntos A = (2 ; 4) y B = (5 ; 6).




a. Ubicá dos puntos más, llamados C y D, que estén en el primer cuadrante y estén alineados con A y B. Escribí sus coordenadas.

b. Ubicá un punto en el segundo cuadrante y uno en el tercero que estén alineados con A y B. Escribí sus coordenadas.

c. Escribí las coordenadas de un punto alineado con A y B, y con abscisa −4.

.......................................................................................................................................

d. Escribí las coordenadas de dos puntos que estén alineados con A y B, uno cuya abscisa sea 26 y otro con abscisa 27. Explicá cómo los hallaste.

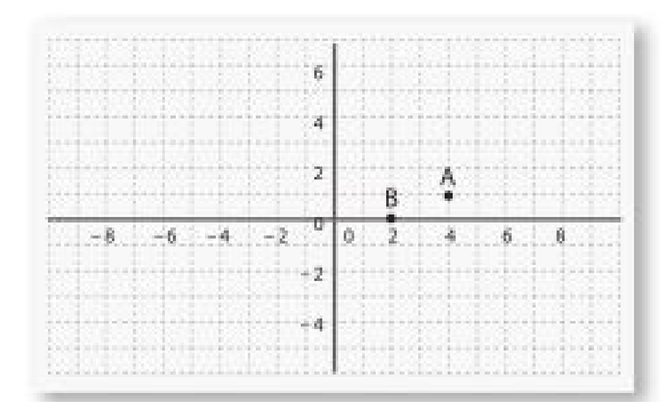
.......................................................................................................................................

e. ¿El punto R = (1.001 ; 673) está alineado con A y B? Justificá tu respuesta.

.......................................................................................................................................

Los dos ejes coordenados dividen al plano en 4 zonas o regiones, llamadas **cuadrantes**. El primer cuadrante es la región superior derecha, el segundo cuadrante es la región superior izquierda, el tercer cuadrante es la región inferior izquierda y el cuarto cuadrante es la región inferior derecha.

**24.** En el siguiente plano cartesiano se marcaron los puntos A = (4 ; 1) y B = (2 ; 0).




a. Marcá cuatro puntos que estén alineados con A y B. Escribí sus coordenadas.

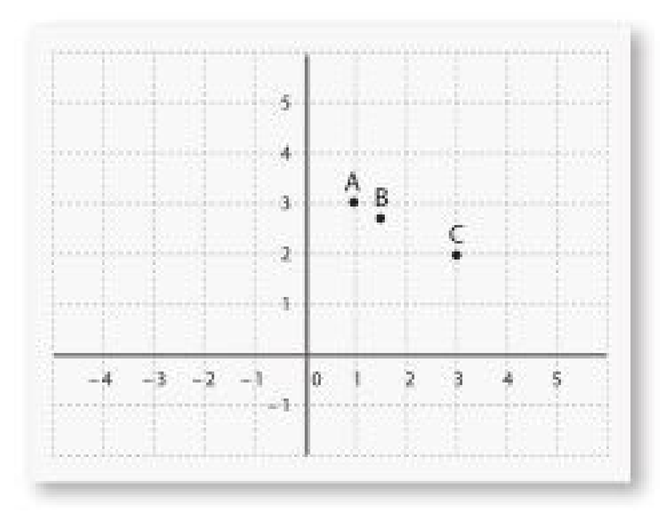
b. Si un punto está alineado con A y B, y su abscisa es 0, ¿cuánto vale su ordenada? ¿Y si el valor de la abscisa fuera 2,7? ¿Y si fuera 3?

.......................................................................................................................................

c. Hallá la fórmula de una función lineal cuyo gráfico pase por los puntos A y B.

.......................................................................................................................................

**25.** En este sistema de coordenadas se marcaron A = (1 ; 3), B = (1,5 ; 2,8) y C = (3 ; 2). ¿Es cierto que estos puntos están alineados? ¿Por qué?




.......................................................................................................

.......................................................................................................

Dados dos puntos del plano, siempre pertenecen al gráfico de una función lineal. Para hallar una fórmula de esa función lineal, se puede empezar calculando su pendiente.
Por ejemplo, si se consideran dos puntos A = (2 ; 7) y B = (4 ; 16), y se llama G a la función lineal cuyo gráfico pasa por ellos, la pendiente de G será $\frac{16-7}{4-2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$. Para completar la fórmula de G es necesario saber el valor de la ordenada del punto donde el gráfico de G corta al eje *y*. Como la pendiente es 4,5, ese valor se puede calcular haciendo: $G(2) - 4{,}5 - 4{,}5 = 7 - 9 = -2$. Para hallar este valor gráficamente, se traza la recta que pasa por A y B, y se mira el valor en el que el gráfico corta al eje *y*. La fórmula de la función lineal es $G(x) = 4{,}5\,x - 2$.





**26.** a. En grupos, escriban una fórmula de la función lineal cuyo gráfico pasa por los puntos A y B de la actividad 23.

.......................................................................................................

b. Usen la fórmula que escribieron para verificar sus respuestas a las tres últimas consignas de la actividad 23.

**27.** a. En parejas, escriban una fórmula de la función lineal T que pasa por los puntos A = (–1 ; 2) y B = (3 ; –4).

.......................................................................................................

b. Hallen un número *p*, sabiendo que el punto (*p* ; –1) pertenece al gráfico de T.

.......................................................................................................

c. Hallen un número *q*, sabiendo que el punto (27 ; *q*) pertenece al gráfico de T.

.......................................................................................................

**1.** En general, las empresas aéreas incluyen en sus tarifas la posibilidad de despachar un equipaje de no más de 15 kg. La aerolínea Alas, en cambio, por cada pasaje cobra un monto fijo que depende del destino y un valor por cada kilogramo de equipaje despachado. La siguiente tabla registra la información de lo que pagaron en total los últimos cinco pasajeros que viajaron por Alas con destino a la ciudad de San Juan.

| | Pasajero 1 | Pasajero 2 | Pasajero 3 | Pasajero 4 | Pasajero 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Peso del equipaje (kg) | 4 | 11 | 18 | 19,5 | 22 |
| Monto pagado ($) | 2.346 | 2.444 | 2.542 | 2.563 | 2.598 |

a. ¿Es cierto que un viaje con 15 kg de equipaje cuesta $2.500? ..........

b. ¿Cuánto cuesta viajar a San Juan por Alas si el equipaje pesa 10 kg? ..........

c. ¿Se puede saber cuánto cuesta volar a San Juan sin equipaje? ..........

d. ¿Cuánto más pagará un pasajero que viaja con 12 kg de equipaje respecto de otro que lleva 8 kg? ¿Y entre uno que viaja con 9 kg de equipaje y otro que viaja con 5 kg?

..........

e. Decidí cuáles de estas fórmulas permiten calcular el monto a pagar (en $) por viajar a San Juan por Alas en función del peso del equipaje que se lleva (en kg).

$2.500 + 14\,x$ $\quad 14 \cdot (x - 11) + 2.444$ $\quad 14\,x + 2.290$ $\quad -14\,x + 2.290$ $\quad -14 \cdot (x - 4) + 2.346$

..........

**2.** Tres empresas aéreas publicitan sus viajes a Ushuaia con los siguientes afiches.










a. Para cada una de las aerolíneas, decidí cuáles de las siguientes fórmulas permiten calcular el monto a pagar (en $) por viajar a Ushuaia en función del peso del equipaje que se despacha (en kg).

$M_1(x) = 30\,x$ $\quad M_2(x) = 500 + 50\,x$ $\quad M_3(x) = 3.500\,x$ $\quad M_4(x) = 10\,x + 1.500$ $\quad M_5(x) = 3.500$

b. Hacé el gráfico de las funciones usando las fórmulas que elegiste.

c. Natalia está por comprar un pasaje aéreo a Ushuaia y tiene pensado despachar 12 kg de equipaje. Si quiere gastar lo menos posible, ¿qué aerolínea le conviene elegir? ¿Cómo te das cuenta usando las fórmulas? ¿Y mirando los gráficos?




**3.** La empresa del servicio de gas natural cobra un cargo fijo y un valor por cada $m^3$ de gas consumido. Esta tabla relaciona el monto de tres facturas diferentes, correspondientes al mismo bimestre.

| | Usuario 1 | Usuario 2 | Usuario 3 |
|---|---|---|---|
| Gas consumido (en $m^3$) | 110 | 140 | 200 |
| Monto pagado (en $) | 320 | 395 | 545 |

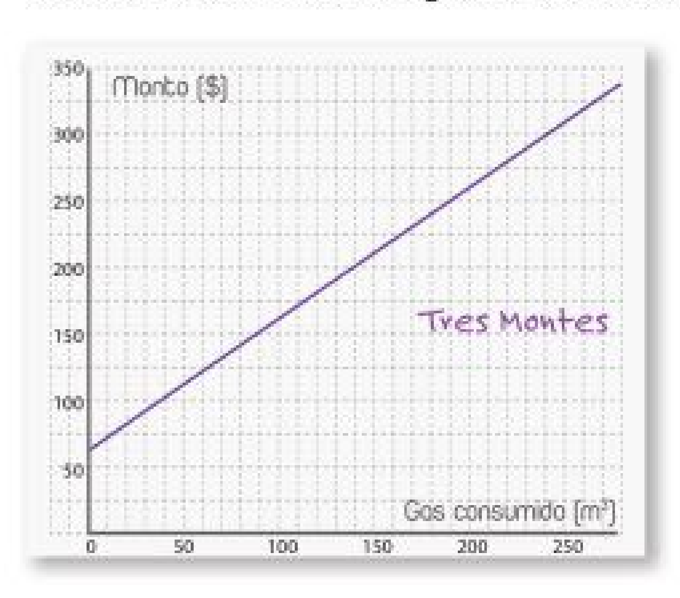
a. ¿Cuánto cobra la empresa por $m^3$ consumido?

b. Escribí una fórmula de $M(x)$, que es el monto pagado (en $) en función del gas consumido (en $m^3$).

c. Usá la fórmula para calcular el monto a pagar por un consumo de 180 $m^3$.

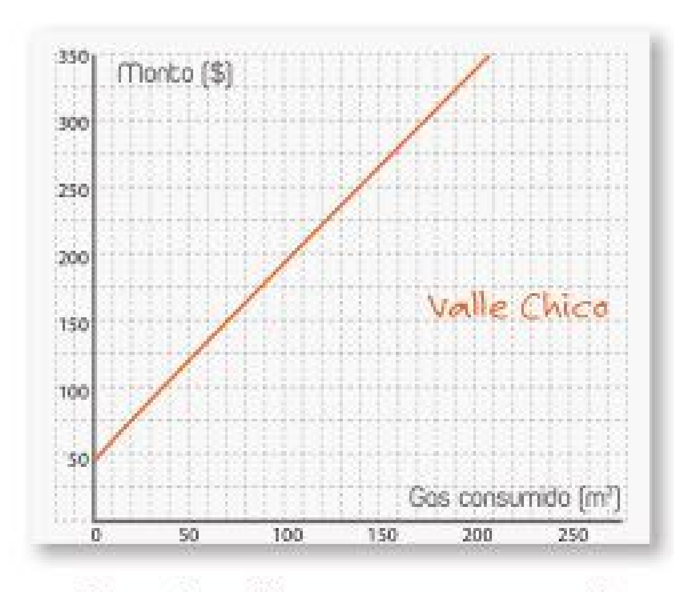
d. Hacé el gráfico cartesiano de la función $M(x)$.

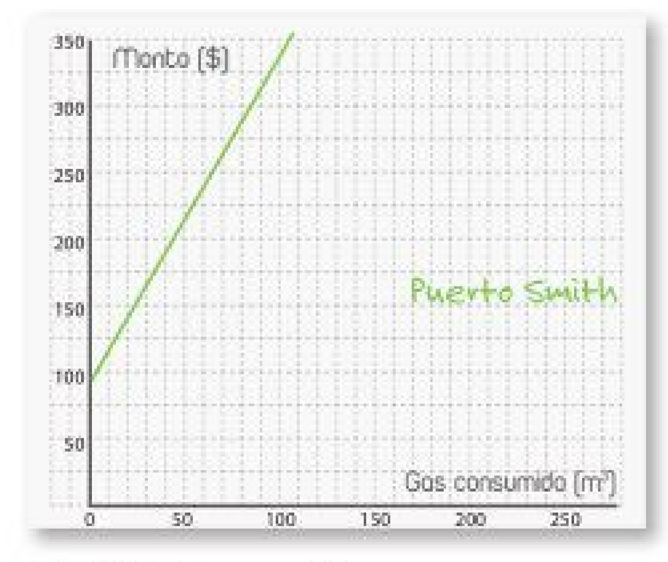
**4.** Estos cuatro gráficos representan el monto de la factura del tercer bimestre del 2016 (en $) en función de la cantidad de gas consumido (en $m^3$), en cuatro pueblos distintos.










a. ¿En qué pueblo se paga un cargo fijo mayor? Explicá cómo te diste cuenta.

b. ¿En qué pueblo se paga menos por $m^3$ consumido? Explicá cómo te diste cuenta.

c. Si un usuario consume 100 $m^3$, ¿en qué pueblo pagaría menos? ¿Y en cuál pagaría más?

d. Para cada pueblo, escribí una fórmula del monto de la factura bimestral (en $) en función del gas consumido (en $m^3$).

**5.** Para publicitar las tortas que venden en los recreos, los compañeros de Micaela quieren hacer un gran cartel con forma de pentágono regular. Para decorarlo, en todo el borde le van a pegar una cinta azul, como muestra el dibujo.




a. Eva propone hacer el cartel con un pentágono de 1,5 metros de lado. ¿Cuántos metros de cinta azul necesitarían para decorarlo?

b. Calculá la pendiente y la ordenada al origen de la función C(*x*), que es la cantidad de cinta necesaria para decorar el borde del pentágono (en m), cuando la longitud del lado del pentágono es *x* (en m).

c. Realizá el gráfico cartesiano de la función C(*x*) en tu carpeta.

d. Milton dice que si el pentágono tuviera 3 metros de lado, necesitarían el doble de cinta que si tuviera 1,5 metros de lado. ¿Tiene razón?

e. Leila dice que para calcular $C\left(\frac{1}{2}\right)$, se puede hacer C(1,5) y dividirlo por 3. ¿Tiene razón?

**6.** a. La fórmula de una función es $F(x) = \frac{1}{4}x - 5$. Completá la tabla.

| *x* | −2 | 0 | | 14 | |
|---|---|---|---|---|---|
| F(*x*) | | | −3 | | 0 |

b. Proponé dos puntos que estén en el primer cuadrante y pertenezcan al gráfico de F.

c. ¿Hay puntos del gráfico en el segundo cuadrante? Justificá tu respuesta.

d. Propongan un punto que quede por arriba del gráfico de F. Expliquen cómo lo pensaron.

**7.** Decidan cuáles de estas tablas pueden pertenecer a una función lineal. Para las que sí puedan pertenecer a funciones lineales, completen el casillero vacío suponiendo que es lineal.

| *x* | −2 | $\frac{3}{7}$ | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| F(*x*) | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{7}$ | 4 | |

| *x* | $-\frac{1}{2}$ | 5 | 9 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| G(*x*) | 3 | 7 | $\frac{67}{8}$ | |

| *x* | −3 | −1 | $\frac{6}{5}$ | $\frac{10}{5}$ |
|---|---|---|---|---|
| R(*x*) | $-\frac{43}{5}$ | $-\frac{13}{5}$ | 4 | |

**8.** a. En un archivo de GeoGebra introducí en la barra de entrada la fórmula de una función lineal cuyo gráfico pase por el punto (0 ; 2,6) y corte al eje *x* en un valor positivo. ¿Cuáles son todas las funciones posibles que cumplen lo pedido?

b. Encontrá una función lineal cuyo gráfico pase por el punto (0 ; 5,3) y que corte al eje *x* en los valores negativos. ¿Cuáles son todas las funciones posibles que cumplen lo pedido?

**9.** Usá GeoGebra para hacer el gráfico de dos funciones lineales que pasen por el punto (2,4 ; 6). ¿Cuántas funciones lineales hay que cumplan lo pedido?

**10.** a. Encontrá la fórmula de una función lineal cuyo gráfico pase por los puntos (1 ; 5) y (2 ; 8). ¿Cuántas funciones lineales hay que cumplan lo pedido?

b. Comprobá, usando la fórmula, que la función cumpla lo pedido.

c. Graficá la función en un archivo de GeoGebra y comprobá que el gráfico sea una recta que pasa por los dos puntos dados.

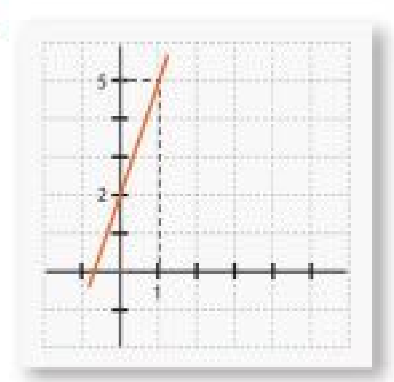
**11.** a. Escribí la fórmula de una función lineal que tenga pendiente igual a –4 y cuyo gráfico pase por el punto (1 ; 5). ¿Cuántas funciones lineales hay que cumplan lo pedido?

b. Hacé el gráfico de la función lineal en un archivo de GeoGebra.

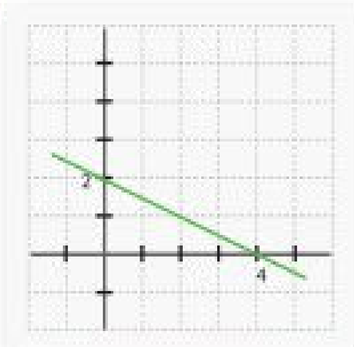
c. ¿Cómo podés comprobar en el gráfico que la función cumple las dos condiciones pedidas?

**12.** Escribí una fórmula para la función lineal representada en cada gráfico.

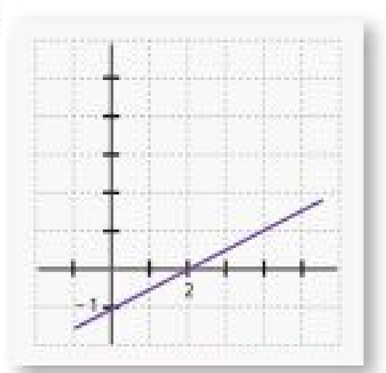
a.




b.




c.




**13.** a. Encontrá una función lineal que se anule en $x = 2$.

b. Encontrá una función lineal que se anule en $x = -2$.

**14.** Para cada una de las siguientes funciones lineales, indicá dónde cortan al eje *y*, dónde cortan al eje *x*, escribí otro punto por donde pasen e indicá si son crecientes o decrecientes.

a. $F(x) = 2 \cdot (x - 4)$ b. $G(x) = -3 \cdot (x + 2)$ c. $H(x) = -2x - 4$

**15.** En cada caso, inventá, si es posible, una función lineal que cumpla lo pedido. Si te parece que no es posible, explicá por qué.

a. Es creciente y su gráfico corta al eje *x* en un valor positivo.

b. Es creciente y su gráfico corta al eje *x* y al eje *y* en valores positivos.

c. Es creciente y su gráfico no pasa por el segundo cuadrante.

d. Es decreciente y su gráfico no pasa por el primer cuadrante.

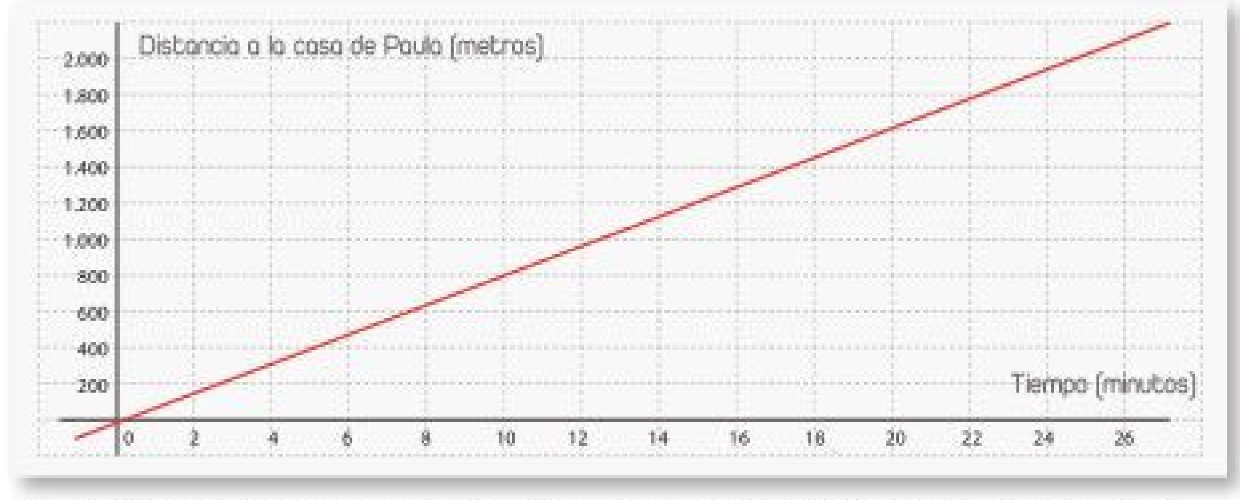



Capítulo 7

**Ecuaciones lineales con una variable:** a partir de funciones lineales, resolución a través de transformaciones que conservan las soluciones. Inecuaciones con una variable. Relación entre problema y ecuación.

# Funciones lineales, ecuaciones e inecuaciones

**1.** Paula vive en una zona rural y, desde su casa, llega al club caminando 2.000 metros por una calle recta. Un día sale para el club, caminando a una velocidad constante. El siguiente es el gráfico de la función P($x$), definida como la distancia de Paula a su casa (en metros) después de haber caminado $x$ minutos.




Aníbal vive sobre la misma calle que Paula, pero 400 metros más cerca del club. Sale al mismo tiempo que ella hacia el club, caminando más lento, a 60 metros por minuto. ¿Qué distancia habrá entre ellos 5 minutos después de salir?

# Funciones y ecuaciones con una variable

**2.** a. En el sistema de ejes de la página anterior, representá la función A(*x*), definida como la distancia (en metros) de Aníbal a la casa de Paula luego de *x* minutos de haber partido.

b. ¿El gráfico de A(*x*) corta al eje de las abscisas? ¿Y al eje de las ordenadas? Explicá por qué pasa eso.

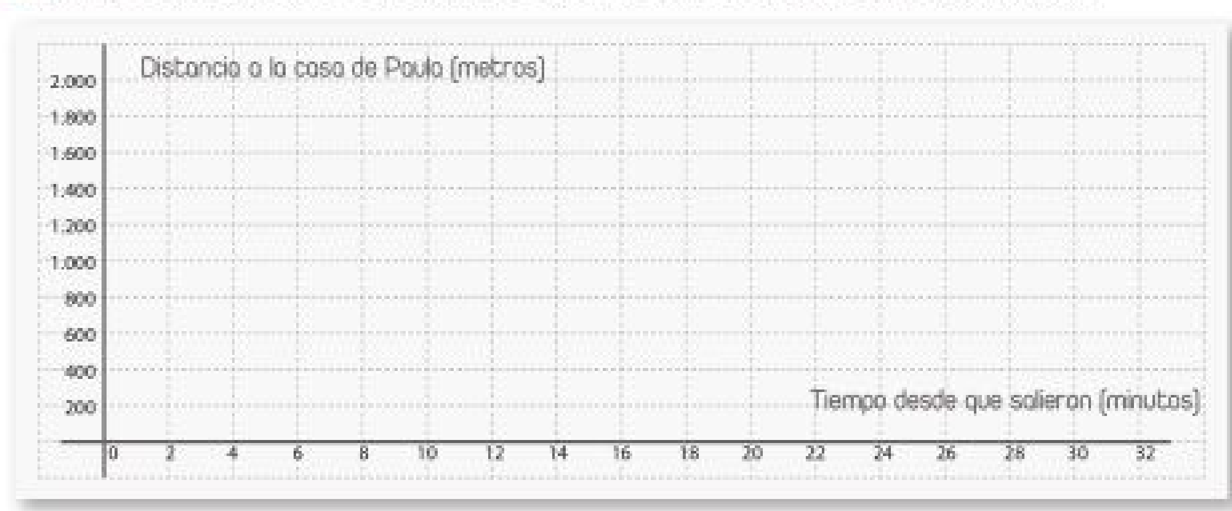
c. Comprobá en el gráfico tu respuesta a la actividad 1.

d. Usando el gráfico, indicá en qué instante se encuentran los dos compañeros y a qué distancia de la casa de Paula.

e. Escribí una fórmula para A(*x*) y otra para P(*x*), la función de la actividad 1, y usalas para comprobar las respuestas que diste en la consigna anterior.

**3.** Otro día, Aníbal y Paula vuelven a salir para el club al mismo tiempo, cada uno desde su casa. Paula camina a 100 metros por minuto y Aníbal a 70 metros por minuto. Resuelvan las consignas en grupos.

a. Representen en este sistema de ejes las nuevas funciones A(*x*) y P(*x*).




b. ¿Qué distancia separará a los amigos 2 minutos después de salir? ¿Y 4 minutos después? Marquen en el gráfico qué miraron para responder.

c. ¿En qué momento y a qué distancia de la casa de Paula, aproximadamente, se encuentran? Marquen en el gráfico qué miraron para responder.

d. Encuentren fórmulas para las nuevas funciones A(*x*) y P(*x*).

e. Usen las fórmulas para verificar la respuesta que dieron en la tercera consigna.

En las actividades 2 y 3 trabajaron, en cada caso, con dos funciones lineales, buscando los valores de la variable independiente que hacen que las dos tomen el mismo valor. Para buscar ese valor, graficaron las dos funciones y encontraron visualmente el punto donde se cortan las dos rectas. La abscisa de ese punto es el valor de $x$ buscado.
Luego, evaluaron las fórmulas de las dos funciones para comprobar si ambas daban lo mismo para ese valor de $x$. Es posible que en la actividad 2 les haya dado exacto, pero que en la actividad 3 el resultado haya sido aproximado.
Para problemas como estos, en los que se buscan los valores de $x$ en los cuales coinciden dos funciones, la respuesta que se obtiene visualmente de los gráficos suele ser aproximada. A veces puede ser suficiente tener esa respuesta aproximada, pero otras veces se necesita una respuesta exacta. A continuación estudiarán cómo encontrarla.

**4.** Discutan en grupos cuáles de estos cuatro razonamientos les parecen correctos para encontrar el lugar y la hora en que se encontraron Paula y Aníbal el día mencionado en la actividad 3. Expliquen por qué son correctos o incorrectos.

Mirando el gráfico, puedo ver que se encontraron un poquito después de los 13 minutos y que estaban a más de 1.300 metros de la casa de Paula.

Cuando salió Aníbal, estaban a 400 metros de distancia y, como Paula recorría 100 metros por minuto, tardó 4 minutos en encontrarlo. Se encontraron a 800 metros de la casa de Paula.

Uso las fórmulas $P(x) = 100x$ y $A(x) = 70x + 400$.
Como busco el valor de x en el cual las dos dan lo mismo, escribo la ecuación: $\boxed{100x = 70x + 400}$.
Para encontrar sus soluciones, voy transformándola en otras más sencillas que tengan las mismas soluciones.
Primero, separo las velocidades: $100 = 70 + 30$,
y así transformo la ecuación en $\boxed{30x = 400}$.
Tiene las mismas soluciones que la primera ecuación, porque le saqué $70x$ de los dos lados del signo igual, que tiene el mismo resultado para cualquier valor de x.
La solución de la última ecuación es $\boxed{x = \frac{400}{30}}$.
La cuenta da $13\frac{1}{3}$ minutos. Transformo $\frac{1}{3}$ minuto a segundos, que son 20. Al final obtengo 13 minutos y 20 segundos, que es el momento de encuentro.
El lugar donde se encontraron lo calculo con cualquiera de las dos fórmulas, ya que en las dos va a dar igual, y luego hago las cuentas aproximando a dos decimales:
$100 \cdot \frac{1}{3} = 1.333{,}33$ metros
$70 \cdot 13\frac{1}{3} + 400 = 933{,}33 + 400 = 1.333{,}33$ metros

La distancia que separa a los amigos cuando comienzan a caminar es 400 metros. Como Paula va más rápido que Aníbal, le descuenta 30 metros por cada minuto de marcha. Entonces calculo cuántos minutos va a tardar Paula en descontar los 400 metros, y eso es $\frac{400}{30} = \frac{40}{30} = 13\frac{1}{3}$ minutos.
Ahora compruebo que las dos funciones den la misma distancia para ese momento.
$P\left(\frac{40}{30}\right) = 100 \cdot \frac{40}{30} = \frac{4000}{3} = 1.333\frac{1}{3}$ metros
$A\left(\frac{40}{30}\right) = 70 \cdot \frac{40}{3} + 400 = 1.333\frac{1}{3}$ metros

**5.** En una ciudad hay dos compañías que ofrecen el servicio de telefonía. La compañía A cobra un cargo fijo de $450 por mes más $0,50 por minuto hablado. La compañía B cobra un cargo fijo de $348 por mes y $0,65 por minuto hablado. Alicia es cliente de la compañía A y su amiga Blanca es clienta de la compañía B. Resolvé las consignas en tu carpeta.

a. Si un mes las dos hablan 8 horas y media, ¿cuál de las dos amigas paga más?

b. Escribí dos cantidades de tiempo hablado en las que Blanca pague más por el servicio que su amiga Alicia.

c. Planteá una fórmula para $A(x)$ y otra para $B(x)$, definidas como las funciones que expresan el monto a pagar por el servicio de telefonía de cada compañía si se hablan $x$ minutos.

d. Usá las fórmulas para corroborar tus respuestas a las dos primeras consignas.

e. Un mes las amigas se encuentran y descubren que las dos hablaron lo mismo y que les cobraron lo mismo. Escribí una ecuación que permita averiguar cuántos minutos hablaron ese mes y cuánto pagaron. Resolvela y averigualo.

f. Usá el programa GeoGebra para graficar las dos funciones y comprobá visualmente en la ventana gráfica si tus respuestas anteriores son correctas.

g. Un mes Alicia paga menos que Blanca. ¿Se puede saber cuánto habrá hablado mirando los gráficos?



**6.** Un micro salió de Buenos Aires por la ruta 9 con destino a Rosario, distante a 294 km. A la misma hora salió un camión desde Rosario hacia Buenos Aires por la misma ruta.




a. Se sabe que en 40 minutos el micro recorrió 60 km y que en todo el recorrido mantuvo la misma velocidad. ¿Cuál era la velocidad del micro?

..............................................................................................................

b. Se define a $C(x)$ como la función que relaciona el tiempo transcurrido desde que partió el camión (en horas) con su distancia a Buenos Aires (en km). Se sabe que una fórmula para la función es $C(x) = 294 - 78\,x$. ¿A qué velocidad iba el camión?

..............................................................................................................

c. ¿Qué distancia separaba a los vehículos una hora después de haber partido?

..............................................................................................................

d. En tu carpeta, planteá una ecuación para encontrar en qué momento el micro y el camión se cruzaron sobre la ruta 9.

e. Resolvé la ecuación y respondé a qué distancia de Buenos Aires se cruzaron y cuánto tiempo después de haber partido.

Para responder las dos últimas consignas de la actividad anterior, se puede seguir el siguiente argumento.

- Para el micro, como en 40 minutos recorre 60 km, en 1 hora recorre 90 km; entonces la fórmula $M(x) = 90 \cdot x$ permite calcular a qué distancia de Buenos Aires (en km) se encontrará a las $x$ horas de haber partido.
- La ecuación que resulta de plantear $M(x) = C(x)$ permite buscar el valor de $x$ (en horas) en el cual ambos vehículos están a la misma distancia de Buenos Aires. Resulta entonces: $90 \cdot x = 294 - 78\,x$.
- Como los vehículos van en sentido contrario, por cada hora que pasa se acercan unos $90 + 78 = 168$ km. Se puede usar esta idea para transformar la ecuación, sumando $78\,x$ de los dos lados del signo igual. Con este cambio, las soluciones siguen siendo las mismas, porque lo que se suma da igual para cualquier valor de $x$.

$$90 \cdot x + 78 \cdot x = 294 - 78 \cdot x + 78 \cdot x$$
$$168 \cdot x = 294$$

- Esta última ecuación plantea la condición sobre el tiempo $x$ que tardarán en encontrarse, ya que juntos descuentan 168 km por hora.

  Eso se cumple para $x = \frac{294}{168} = 1{,}75$ horas $= 1\,\frac{3}{4}$ horas. Es decir que se encuentran 1 hora y 45 minutos después de haber partido.
- Para encontrar a qué distancia de Buenos Aires se cruzan, se puede hacer la cuenta $90 \cdot 1{,}75$ o la cuenta $294 - 78 \cdot 1{,}75$. Las dos dan el mismo resultado, que es 157,5 km.

**7.** Un automóvil parte de Tilcara hacia Córdoba por la ruta 9 marchando a 86 km/h durante 96 minutos y después se detiene. En el mismo instante parte una combi, también hacia Córdoba, pero 23 km más adelante sobre esa ruta. La fórmula de la función que relaciona la distancia de la combi a Tilcara (en km) con el tiempo transcurrido desde que los dos vehículos partieron (en horas) es $C(x) = 23 + 74 \cdot x$. Se quiere saber en qué momento se encuentran ambos vehículos.

a. Planteá una ecuación que permita averiguar el momento de encuentro.

b. Resolvé la ecuación que escribiste.

c. ¿En qué momento y en qué lugar de la ruta se encuentran los dos vehículos? Discutan las respuestas entre todos.

**8.** En quinto año vendieron rifas a $12 cada una y dieron como premio una guitarra que les costó $2.520. Mauro dice que la recaudación final fue de $1.372. Algunos chicos dicen que eso no es posible.

a. Planteá una ecuación que permita saber cuántas rifas se vendieron si es cierto lo que dijo Mauro.

b. Resolvé la ecuación que escribiste.

c. ¿Es cierto lo que dice Mauro? ¿Por qué?

Esta actividad retoma la situación desarrollada en la actividad 13 de la página 96.

## Transformar una ecuación para hallar su solución

**9.** Para hallar la solución de la ecuación $3x + 6 = 5 - 4x$, Ileana hizo lo siguiente.

> $3x + 6 = 5 - 4x$
> $3x + 5 + 1 = 5 - 4x$ → Descompongo $6 = 5 + 1$.
> $3x + 1 = -4x$ → Acá resto lo que tienen en común (el 5) los dos lados, porque solo hay que asegurarse de que lo que quedó dé lo mismo.
> $3x + 1 + 4x = -4x + 4x$ → Sumo $4x$ a ambos lados.
> $7x + 1 = 0$ → ..........
> $7x = -1$ → ..........
> $x = -\frac{1}{7}$ → La solución de la ecuación es $-\frac{1}{7}$.

a. Con un compañero, completá las explicaciones que faltan.

b. ¿Es cierto que $-\frac{1}{7}$ es solución de la ecuación $3x + 6 = 5 - 4x$? ¿Es cierto que también es solución de las ecuaciones $3x + 1 = -4x$ y $7x + 1 = 0$? ¿Por qué?

**10.** Para resolver la ecuación $\frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{6} + \frac{1}{2}$, Pablo usó dos procedimientos.

> Primer procedimiento
> $\frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{6} + \frac{1}{2}$
> $\frac{x}{3} + 1 - \frac{x}{6} = \frac{x}{6} + \frac{1}{2} - \frac{x}{6}$
> $\frac{x}{3} - \frac{x}{6} + 1 = \frac{1}{2}$
> $\frac{x}{6} = \frac{1}{2} - 1 \rightarrow \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$
> $x = -\frac{1}{2} \cdot 6 \rightarrow x = -3$

> Segundo procedimiento
> $\frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{6} + \frac{1}{2}$ → triplico las expresiones
> $x + 3 = \frac{3x}{6} + \frac{3}{2}$
> $x + 3 - 3 = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} - 3$
> $x = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ → duplico las dos expresiones
> $2x = x - 3 \rightarrow x = -3$

a. Para cada procedimiento, expliquen en grupos si las distintas ecuaciones que escribió Pablo tienen la misma solución que la original.

b. Victoria multiplicó por 6 como primer paso para resolver la ecuación. Resuelvan la ecuación usando esa estrategia.

c. Verónica multiplicó por 0 en el primer paso. Resuelvan la ecuación usando esa estrategia.

**Resolver una ecuación** significa hallar los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad que plantea esa ecuación o justificar por qué no hay valores de la variable que hacen verdadera la igualdad.

Para resolver una ecuación, se la puede transformar en otra más sencilla de analizar, pero tiene que tener las mismas soluciones que la ecuación original. Estas transformaciones pueden ser las siguientes.

- **Sumar o restar el mismo número** a las expresiones que se encuentran a ambos lados del signo igual. Por ejemplo, en la actividad 9, lo que hizo Ileana en el segundo paso.
- **Multiplicar o dividir por un número distinto de cero** a las expresiones que se encuentran a ambos lados del signo igual. Por ejemplo, el primer paso del segundo procedimiento de la actividad 10.

Si se multiplica por cero, la nueva ecuación tiene otras soluciones. Por ejemplo, la que estudiaron en la tercera consigna de la actividad 10.

- **Sumar o restar la misma expresión con variable** a las expresiones que se encuentran a ambos lados del signo igual. Por ejemplo, en la actividad 9, lo que hizo Ileana cuando sumó $4x$.

Al multiplicar por 0 a ambos lados del signo igual, queda $0 = 0$. Esa condición se cumple para todo valor de $x$, es decir que resulta una ecuación cuyas soluciones son todos los números.

**11.** a. ¿Es cierto que $m = 24$ es solución de la ecuación $-\frac{1}{4}m + 12 = \frac{2}{3}m - 10$?

b. Sandra comenzó a resolver la ecuación multiplicando por 4, María comenzó multiplicando por 3 y Carla, multiplicando por 12. ¿Será alguno de estos procedimientos más conveniente que los otros? Elegí uno para comenzar y terminá de resolver la ecuación.

c. Proponé un procedimiento diferente para hallar la solución de la ecuación.

d. ¿Es cierto que convendría multiplicar por 0 para hallar la solución? Explicá tu respuesta.

**12.** Lisandro hizo lo siguiente para hallar la solución de la ecuación $2m + 5 = \frac{m}{3} + 1$.

$2m + 5 = \frac{m}{3} + 1 \overset{①}{\rightarrow} \frac{6m}{3} + 5 = \frac{m}{3} + 1 \overset{②}{\rightarrow} \frac{5m}{3} + 5 = 1 \overset{③}{\rightarrow} 5m + 15 = 3 \overset{④}{\rightarrow} 5m = -12 \overset{⑤}{\rightarrow} m = -\frac{12}{5}$

a. En grupos, expliquen cada paso de la estrategia de Lisandro.

b. ¿Es cierto que $-\frac{12}{5}$ es solución de la ecuación?

c. ¿Pueden usar el procedimiento de Lisandro para proponer dos ecuaciones que también tengan a $-\frac{12}{5}$ como solución? Expliquen sus respuestas.

d. Propongan un procedimiento diferente al de Lisandro para hallar la solución.



**13.** Sin resolverla, proponé en tu carpeta cuatro ecuaciones que tengan la misma solución que $2 \cdot \left(t - \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot (t + 3)$. En cada caso explicá tu respuesta.

**14.** Resolvé las siguientes ecuaciones en la carpeta.

a. $-3 \cdot \left(\frac{k}{12} - 1\right) = 3 - \frac{k}{4}$

b. $-3 \cdot \left(\frac{k}{12} - 1\right) = 5 - \frac{k}{4}$

c. $k^2 - 4 = 0$

d. $k^2 + 4 = 0$

**15.** Mara compró 6 cuadernos iguales y, cuando pagó, le dieron $35 de vuelto. Pablo compró 4 de esos mismos cuadernos en la misma librería y le devolvieron $90. Para pagar, los dos le dieron a la vendedora la misma cantidad de dinero.

a. Si $x$ es el precio de un cuaderno, en grupos, indiquen cuál de las siguientes ecuaciones permite encontrar el valor de $x$.

$6x - 35 = 4x - 90$ $\quad$ $6x + 35 = 4x + 90$ $\quad$ $35 - 6x = 90 - 4x$

b. En la carpeta, calculen el precio de un cuaderno.

c. ¿Cuánto dinero le dieron a la vendedora?

**16.** Daniel y Florencia compraron madejas de lana. Daniel llevó $500 y compró 7 madejas iguales; Florencia tenía $250 y compró 2 madejas de esa misma lana. Curiosamente, luego de la compra, ambos tenían la misma cantidad de dinero.

a. Planteen una ecuación que les permita obtener cuánto cuesta cada madeja.

b. ¿Servirá el planteo que hicieron en la consigna anterior para conocer cuánto dinero tenía cada uno luego de la compra?

**17.** Juan participa en un juego para ganarse una bicicleta. De una bolsa que tiene papelitos con los números del 1 al 100, saca uno y hace las siguientes cuentas: al número del papelito le suma 3 y luego lo multiplica por 5, al resultado le suma el número que sacó y le resta 18. Gana la bici si el resultado final es 81.

a. Juan sacó un papel con el número 9. ¿Ganó?

b. Si no ganó, ¿qué número tendría que haber sacado para ganar? ¿Hay más de un número con el que podría haber ganado la bici?

**18.** Matilda quiere sorprender a su familia con un truco de magia que anotó.

Proponerle a un participante que haga las siguientes cuentas.
1. Elegí un número de dos cifras y sumale 5.
2. Al resultado, multiplicalo por 2
3. Al resultado, sumale 12
4. Al resultado, dividilo por 2.
5. Al resultado, restale el número que elegiste.
Al final de las cuentas decir que el resultado es 11.

En grupos, practiquen el truco y estudien si es cierto que el resultado final siempre será 11. Expliquen su respuesta.



**19.** En este juego cada participante usa una calculadora. Cada jugador elige un número y le resta 4, multiplica al resultado por 3 y luego le suma 20, después le resta el triple del número que eligió. Gana el que obtiene el número 10.

a. En parejas jueguen dos veces.

b. ¿Qué número elegirían para ganar el juego? Expliquen su respuesta.

En las actividades de este capítulo estudiaron que se puede plantear y resolver una ecuación para hallar la respuesta a un problema.
Por ejemplo, la ecuación de la actividad 3, $100\,x = 70\,x + 400$, expresa la condición para el tiempo $x$ en el que Paula y Aníbal se encuentran. La solución $x = \frac{40}{3}$ es la respuesta al problema.
En la actividad 18 se puede plantear $\frac{2 \cdot (x + 5) + 12}{2} - x = 11$ y, al resolver la ecuación, se obtiene que **cualquier número es una respuesta al problema**.
En la actividad 19, para buscar un número $m$ con el que se gane el juego, se puede plantear la ecuación $3 \cdot (m - 4) + 20 - 3\,m = 10$ y, al resolverla, se obtiene que **ningún número es una respuesta al problema; no tiene solución**.

# Inecuaciones

**20.** Ada evalúa qué empresa de internet le conviene contratar. La empresa Teknet cobra un cargo fijo de \$152 mensuales más \$1,3 por hora de conexión. La empresa Chenet ofrece el mismo servicio y calcula el cobro mensual con la fórmula $2 \cdot h + 51{,}9$, en la que $h$ es el tiempo (en horas) de conexión.

a. Si Ada usa 100 horas de internet por mes, ¿qué empresa le conviene contratar?

b. ¿Cuántas horas de internet tiene que consumir para que le convenga contratar Chenet? ¿Y para que le convenga Teknet?

**21.** Decidan si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Expliquen sus decisiones.

a. Si la variable $r$ toma el valor $-\frac{1}{3}$, entonces $8 + r < -4$.

b. Si la variable $j$ toma valores positivos, entonces $1 + 3 \cdot j > 410 - j$.

c. La expresión $2 + 8 \cdot k$ es mayor a la expresión $2 + 5 \cdot k$ para cualquier valor de $k$.

El signo < indica que el número que se coloca a su izquierda es menor que el que está a la derecha. Por ejemplo, $-14 < -12$.
El signo > indica que el número que se coloca a su izquierda es mayor que el que está a la derecha. Por ejemplo, $-7 > -300$.

**22.** En cada caso, proponé, si es posible, tres valores de $t$ que cumplan la condición.

a. $15 + 2 \cdot t$ es menor que 3.

b. $15 + 2 \cdot t$ es mayor que $-5$.

c. $15 + 2 \cdot t < 15 + t$

d. $15 + 2 \cdot t > 13 + 2 \cdot t$

**23.** Decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Explicá tus decisiones.

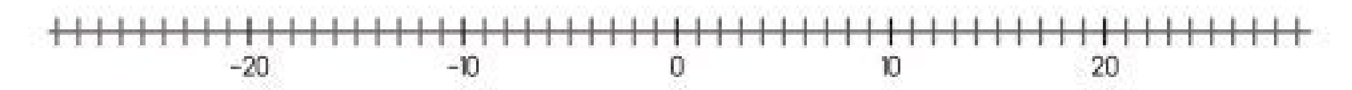
a. El resultado de $2 \cdot m + 8$ es mayor que 8 para cualquier valor de $m$.

b. El resultado de $2 \cdot m + 8$ es mayor que 0 para los valores de $m$ mayores que $-4$.

c. El resultado de $2 \cdot m + 8$ es menor que 6 para los valores de $m$ menores que $-3$.

**24.** En grupos, para cada consigna de la actividad 22, estudien cuáles son todos los valores con que podrían reemplazar la variable $t$ para que se cumpla lo pedido.

**25.** a. Usá la recta numérica para marcar con rojo los valores que puede tomar $m$ si $\frac{m}{2} > 6$ y, con azul, los valores de $m$ que cumplan que $-\frac{m}{2} > -6$. Los números pintados de azul, ¿son los mismos que los pintados de rojo?

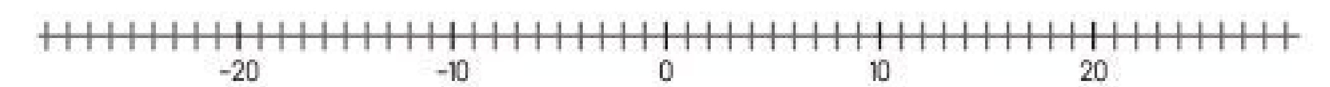



b. Decidí cuáles de las desigualdades tiene las mismas soluciones que $\frac{m}{2} > 6$.

$-m > -12$ $\quad$ $-m < 12$ $\quad$ $-m < -12$

En las actividades de esta página estudiaron desigualdades en las que intervienen expresiones con variables. Estas desigualdades se llaman **inecuaciones**. Al conjunto de valores que hacen verdadera la desigualdad se lo llama **conjunto solución** de la inecuación.

**26.** a. Marcá en la recta numérica los valores que puede tomar $t$ si $-2\,t > 8$.




b. Si tuvieras que ubicar en la recta los valores de $t$ que verifican cada una de las siguientes inecuaciones, ¿cuáles coincidirían con los valores que marcaste? Explicá tu respuesta.

$2\,t > -8$ $\qquad -t > 4 \qquad 2\,t < -8 \qquad t > -4 \qquad t < -4$

**27.** En grupos, propongan para cada caso, si es posible, tres valores positivos de $r$ y tres negativos que cumplan la condición pedida. ¿Cuáles son todos los valores con que pueden reemplazar la variable $r$ para que se cumpla lo pedido?

a. $-3 \cdot (6 + r) > 0$ $\qquad$ b. $-3 \cdot (6 + r) \geq -18$ $\qquad$ c. $-3 \cdot (6 + r) < -18$

**28.** Lucía y Barbi resolvieron la inecuación $6 - \frac{x}{3} < 2 \cdot \frac{x}{3}$ y obtuvieron diferentes soluciones. En grupos, decidan si alguna de las chicas resolvió correctamente la inecuación. Expliquen por qué.

Lucía
Resuelvo igual que las ecuaciones:
$6 - \frac{x}{3} < 2 \cdot \frac{x}{3}$ → multiplico por 3
$18 - x < 2x$
$18 - x + x < 2x + x$
$18 < 3x$
Conjunto solución: todos los números mayores que 6.

Barbi
Resuelvo igual que en las ecuaciones:
$6 - \frac{x}{3} < 2 \cdot \frac{x}{3}$ → multiplico por $-3$
$-18 + x < -2x$
$-18 + x + 2x < -2x + 2x$
$-18 + 3x < 0 \rightarrow 3x < 18$
Conjunto solución: todos los números menores que 6

Del mismo modo que con las ecuaciones, para hallar las soluciones de una inecuación, se la puede transformar en una inecuación más sencilla de analizar, pero asegurándose que tenga las mismas soluciones que la inecuación original. Estas transformaciones pueden ser las siguientes.

- **Sumar o restar el mismo número** a las expresiones que se encuentran a ambos lados de la desigualdad. Lo mismo ocurre si se suman o restan expresiones con variables.
- **Multiplicar o dividir por un número positivo** a las expresiones que se encuentran a ambos lados de la desigualdad.

A diferencia de lo que pasa con las ecuaciones, al multiplicar o dividir por un número negativo a las expresiones a ambos lados de una desigualdad, cambian las soluciones de la nueva inecuación.

**29.** Resolvé las siguientes inecuaciones.

a. $10 + k \leq 14$ $\qquad$ b. $10 + x \leq 6$ $\qquad$ c. $5\,r + 3 < 5\,r + 2$

d. $2 \cdot (z + 1) + 6 < 0$ $\qquad$ e. $2 \cdot (3 - y) > -2\,y + 6$ $\qquad$ f. $2 \cdot (3 - b) > -2\,b + 5$

El signo ≥ indica que el número que se coloca a su izquierda es mayor o igual que el que está a la derecha.
El signo ≤ indica que el número que se coloca a su izquierda es menor o igual que el que está a la derecha.

Si en una inecuación **se multiplica o divide por un número negativo** las expresiones que se encuentran a ambos lados de la desigualdad **y se cambia el signo de la desigualdad por el opuesto**, resulta una inecuación con las mismas soluciones que la original.

**Resolver una inecuación** significa hallar los valores de la variable que hacen verdadera la desigualdad o justificar que no hay valores que la hagan verdadera.

## ¿Cada problema con su ecuación?

**30.** Marcelino va a comprar una cierta cantidad de caramelos para armar las bolsitas del cumpleaños de su hija Emma. Cuando llega al negocio, ve que se venden en paquetes. Si compra 4 paquetes, le van a faltar 42 caramelos y si compra 7 paquetes, le sobrarán 39 caramelos.

a. Planteá una ecuación que permita responder cuántos caramelos hay en cada paquete; llamá *x* a esa cantidad.

..........

b. ¿Cuántos caramelos hay en cada paquete? ..........

c. ¿Cuántos caramelos quiere comprar Marcelino? ..........

**31.** Cada semana, Roxana teje la misma cantidad de cuadrados para hacer una colcha. A las 4 semanas le faltan 42 cuadrados y a las 7 semanas le sobran 39 cuadrados.

a. Planteá una ecuación que permita responder cuántos cuadrados teje Roxana por semana; llamá *x* a esa cantidad.

..........

b. ¿Cuántos cuadrados teje Roxana por semana? ..........

c. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para hacer una colcha? ..........

**32.** Martín e Iván viven al lado de la misma ruta a 14,7 km uno del otro. Un día, Martín sale de su casa en auto a 66 km/h hacia el lado de la casa de Iván. En el mismo instante, Iván sale a correr desde su casa al lado de la ruta y en el mismo sentido que circula Martín, a una velocidad de 2 metros por segundo.

a. Decidí cuáles de estas ecuaciones sirven para calcular cuánto tiempo tarda Martín en alcanzar a Iván. Justificá tu decisión en la carpeta e indicá qué representa *x* en cada ecuación elegida.

$66 \cdot x = 2 \cdot x + 14{,}7$ $\qquad$ $\frac{55}{3} \cdot x = 2 \cdot x + 14.700$

$66 \cdot x = 7{,}2 \cdot x + 14{,}7$ $\qquad$ $(66 - 2) \cdot x = 14.700$

b. Resolvé las que elegiste y respondé en qué momento se encuentran y qué distancia corrió Iván hasta ese momento.

Al resolver las actividades 30 y 31, es posible que hayan planteado la misma ecuación para las dos, aunque en una de ellas el valor buscado haya sido la cantidad de caramelos de cada paquete y en la otra, el número de cuadrados tejidos en una semana.
Una misma ecuación puede servir para resolver problemas diferentes.
También un problema se puede resolver a partir de dos ecuaciones con distintas soluciones, pero que permiten llegar a la misma respuesta, como sucedió en la actividad 32. Para plantear una ecuación hay que elegir qué representará la variable y qué unidades se considerarán.

**1.** La entrada a la ciudad de Comodoro Rivadavia, en la Provincia de Chubut, se encuentra en el kilómetro 1.831 de la ruta 3 y la entrada a la localidad de Rada Tilly se encuentra en el kilómetro 1.843 de esa ruta. A las 0 horas de un día, Juan Manuel sale con su camión a una velocidad constante de 90 km/h desde la entrada de Comodoro con destino a Ushuaia. No planea parar hasta las 6 de la mañana.




a. Una hora después de la partida mira el mojón de la ruta, que marca la distancia a Buenos Aires. ¿Qué número habrá leído?

b. Matías, el primo de Juan Manuel, parte con su camioneta el mismo día y a la misma hora de la localidad de Rada Tilly, también en dirección a Ushuaia; viaja a 84 km/h y mantendrá esa velocidad por 6 horas. ¿Qué distancia sobre la ruta separa a los primos en el momento de la partida? ¿Y una hora después?

c. Calculá a qué hora y en qué lugar de la ruta Juan Manuel alcanzará a su primo.

d. Escribí una fórmula para la función $J(x)$, definida como la distancia a Buenos Aires sobre la ruta 3 en que se encuentra el camión de Juan Manuel a las $x$ horas de haber partido de Comodoro Rivadavia, y otra para $M(x)$, definida como la distancia a Buenos Aires sobre la ruta 3 en que se encuentra la camioneta de Matías a las $x$ horas después de haber partido de Rada Tilly.

e. Usá las fórmulas para comprobar la respuesta que diste en la tercera consigna.

**2.** El Gran Hotel de la Sierra ofrece dos planes para las vacaciones de verano.

**Plan 1**
¡Estadía ilimitada!
$1.200 por día

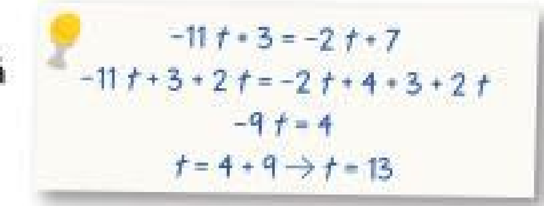
**Plan 2**
Vacacione hasta 2 semanas
$3.300 de ingreso y $750 por día

a. Escribí las fórmulas de las funciones que relacionan el tiempo de estadía con el monto a pagar por cada plan.

b. Hacé un gráfico cartesiano en tu carpeta o usando GeoGebra.

c. ¿Cuál de los dos planes es más conveniente? Explicalo usando las fórmulas y usando el gráfico.

**3.** Para resolver la ecuación $-11\,t + 3 = -2\,t + 7$ se realizó el siguiente procedimiento. Decidí si es correcto. Si pensás que está bien, explicá cada paso. Si pensás que no es correcto, encontrá dónde está el error y explicá por qué.




**4.** Para cada ecuación, sin resolverla, proponé otras dos ecuaciones que tengan las mismas soluciones. En cada caso explicá tu respuesta.

a. $2 \cdot (t - 1) = 7 \cdot (t + 3)$

b. $4 - 2\,v = 2 \cdot (5 - v) - 6$

c. $s = s - 1{,}5$

d. $3\,h - 67 = 8 \cdot (h - 1{,}5) + h$

**5.** En cada caso, inventá dos ecuaciones que cumplan lo pedido y explicá por qué lo cumplen.

a. La solución es $-8$. ..............................

b. No tienen solución. ..............................

c. Todos los números son solución. ..............................

**6.** Completen cada ecuación para que cumpla que la solución es la indicada.

a. $2h + 1 = 3h - 1 +$ .................. Solución: $\frac{1}{3}$.

b. $2a + 1 = 3a - 1 +$ .................. Solución: no tiene.

c. $2x + 1 = 3x - 1 +$ .................. Solución: todos los números.

d. $m^2 =$ .................. Solución: no tiene.

**7.** Resolvé las siguientes ecuaciones.

a. $5h - 1 = 3 \cdot (1 - h)$

b. $\frac{1}{3} + 2x = \frac{2}{3} \cdot (x - 1)$

c. $(2 - \frac{m}{7}) \cdot 7 + 2 = 16 - m$

d. $5 \cdot (4 - r) = \frac{2}{3} \cdot (6 - 2r)$

e. $5k - \frac{8}{3}k + 3 = 7 \cdot (3 - k)$

f. $4 - (3j + 3) = -\frac{3}{2} \cdot (2j - \frac{2}{3})$

g. $y^2 = 81$

h. $s^2 - 2 = 3$

i. $(2t - 10) \cdot (t + 3) = 0$

j. $p^2 + 8 = -17$

**8.** Camila compró 30 copas descartables para su festejo de cumpleaños. Julieta, para su fiesta, compró las mismas copas a $1,35 menos cada unidad, lo que le permitió comprar 6 más por la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto cuesta cada copa que compró Camila? ¿Cuánto gastó cada una?

**9.** Planteá una inecuación para responder la última consigna de la actividad 5 de la página 109.

**10.** Resolvé las siguientes inecuaciones.

a. $x + 10 > -5$

b. $3 - a \leq 8$

c. $-12 \geq 2b + 14$

d. $6 - 2 \cdot (z + 1) \leq 0$

e. $5r + 3 < 5r + 2$

f. $2 \cdot (3 - r) > -2r + 6$

**11.** Completen cada inecuación con los signos >, <, ≥ o ≤ para que se cumpla la condición pedida.

a. $\frac{x}{2}$ .............. $7$ Conjunto solución: $x \leq 14$.

b. $-5m$ .............. $10$ Conjunto solución: $m > -2$.

c. $-r$ .............. $-7$ Conjunto solución: $r > 7$.

d. $3t + 6$ .............. $3 \cdot (t + 2)$ Conjunto solución: todos los números.

**12.** Inventá un truco de magia como el de Matilda de la actividad 18 de la página 113.

**13.** Inventá un juego de números como el de la actividad 19 de la página 113 en el que no se gane nunca.

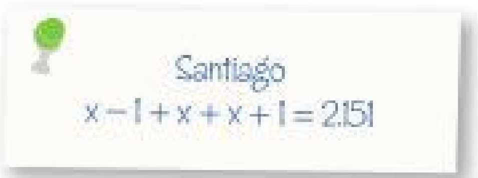
**14.** Inventá un problema que se pueda resolver con la misma ecuación que planteaste en las actividades 30 y 31 de la página 116.

**15.** Martín, Guille y Santiago tenían que hallar tres números naturales consecutivos cuya suma fuera 2.151. Para resolverlo plantearon estas ecuaciones.










a. Analizá si alguna de las ecuaciones sirve para resolver el problema. Explicá por qué.

b. Resolvé las ecuaciones que elegiste y analizá las soluciones de cada una y su relación con el problema planteado.

c. ¿Cuáles son los números consecutivos pedidos?

**16.** Lucía sale en auto de su casa por una ruta a 90 km/h. En el mismo instante, 3.000 metros delante de ella, un corredor comienza a trotar al costado de la ruta y en la misma dirección en la que circula el auto, a una velocidad de 2 metros por segundo. ¿En qué momento Lucía pasa al corredor?

**17.** Los chicos de quinto año quieren alquilar un salón con cena y baile para festejar el final del año. Averiguan estas opciones.

Cemento: cobra un monto fijo de $5.000 más $300 por persona.
Morada: cobra $35.000 y permite hasta 160 personas.
Infinito: no cobra cargo fijo, pero cobra $400 por persona.

a. Si van a concurrir 40 personas, ¿qué salón es más barato? ¿Y más caro?

b. Hacé un gráfico cartesiano que muestre el monto a pagar en función de la cantidad de asistentes para cada uno de los salones. Podés hacerlo en tu carpeta o usar GeoGebra.

c. Planteá ecuaciones o inecuaciones que te permitan contestar qué salón les conviene a los chicos en función de la cantidad de gente que puede llegar a concurrir.

**18.** La pileta del club es rectangular y su largo es igual a 2 veces el ancho más 1,5 metros.

a. Escribí 3 ejemplos de cuáles podrían ser las dimensiones de la pileta.

b. Si se sabe que el borde de la pileta mide 60 metros, analizá si alguna de estas ecuaciones sirve para calcular las dimensiones de la pileta.

$3x + 1{,}5 = 30$ $\quad x - 1{,}5 + 2x = 60$ $\quad (x - 1{,}5 + x) \cdot 2 = 60$ $\quad 2 \cdot (2x + 1{,}5 + x) = 60$

c. ¿Qué representa la variable en cada una de las ecuaciones que elegiste?

d. Utilizá alguna de las ecuaciones para resolver el problema y calcular las dimensiones de la pileta.

**19.** A lo largo del capítulo 2, el capítulo 5 y este capítulo estudiaste varias cuestiones relacionadas con las ecuaciones. Hacé un resumen de lo que aprendiste de las ecuaciones hasta ahora, de cómo resolverlas y de qué es lo que hay que considerar para plantear una ecuación que permita resolver un problema.




**Semejanza de polígonos:** teorema de Thales, criterios de semejanza de triángulos, variación del perímetro y del área de polígonos semejantes.

# Semejanza de figuras y polígonos

**1.** Decidí con un compañero si la foto de la derecha puede ser una reducción de la foto de la izquierda. Expliquen su decisión. Si piensan que es necesario, pueden medir la longitud de cualquier objeto en las fotos usando los instrumentos de geometría.





.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

## Semejanza de figuras

**2.** Decidan en parejas si la foto de la derecha es una reducción de la foto de la izquierda. Expliquen su conclusión.

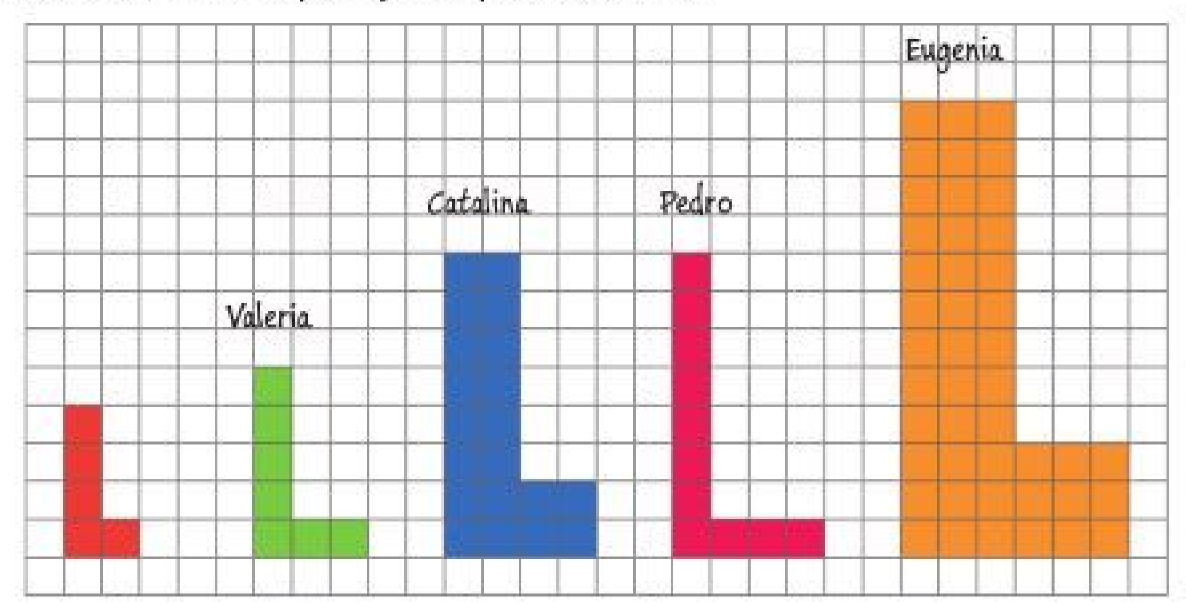




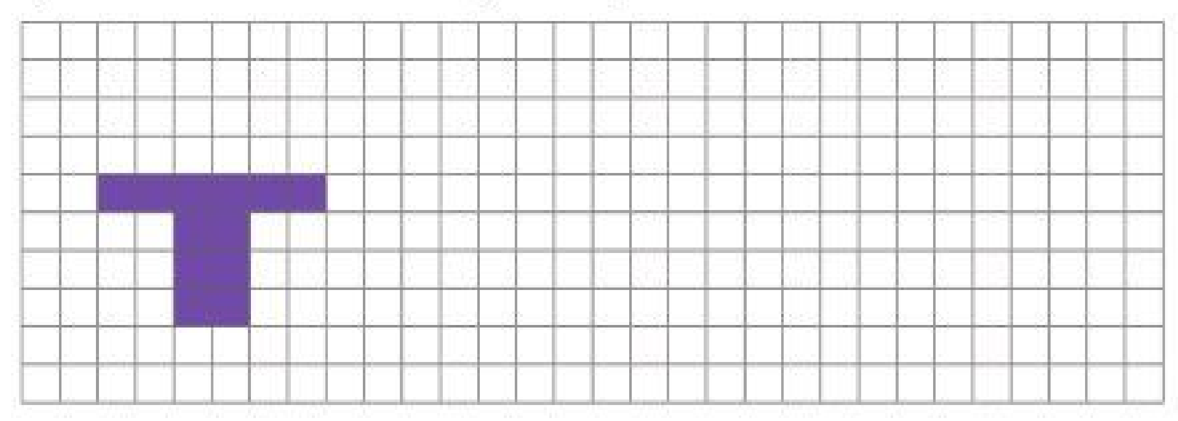
Provisoriamente, se dirá que dos figuras son **semejantes** si tienen la misma forma, aunque cambie su tamaño. Es decir, si a partir de una se puede obtener la otra mediante una ampliación o reducción. Más adelante se discutirá qué significa tener la misma forma.



**3.** Cuatro compañeros de la escuela tenían que dibujar una ampliación de la L roja. Sin medir, discutí con un compañero qué dibujos cumplen lo pedido y cuáles no. En la carpeta, justifiquen cada caso.

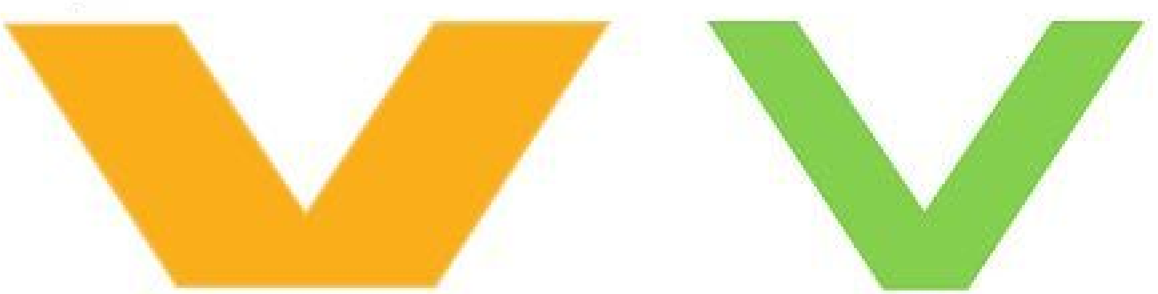



**4.** Dibujá en el cuadriculado una ampliación y una reducción de esta T.

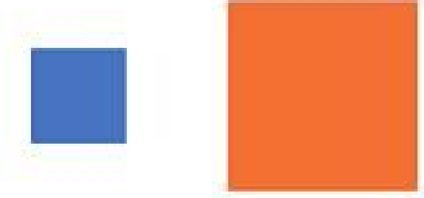


## Semejanza de polígonos

**5.** A Emma le dieron el dibujo color amarillo para que lo redujera a la mitad. Ella dibujó el de color verde. ¿Su dibujo cumple con lo pedido? Si pensás que sí, explicá por qué. Si pensás que no, explicá por qué y trazá el dibujo correcto en tu carpeta.



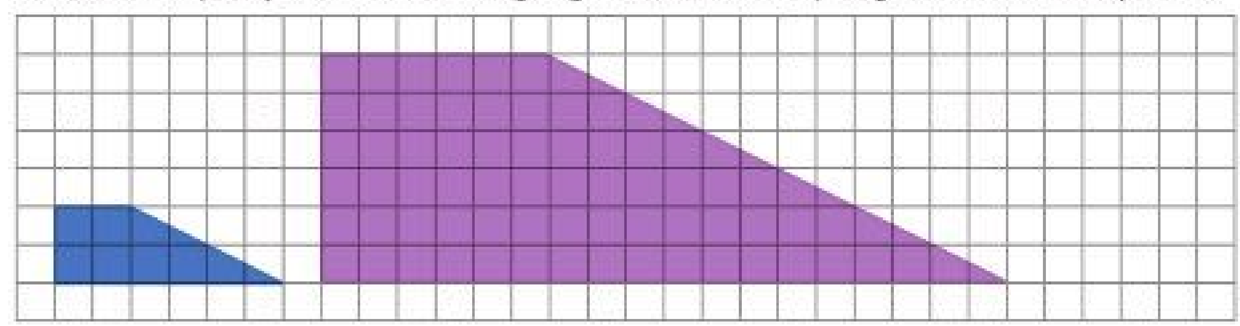
**6.** Sofía tenía que hacer un cuadrado semejante al azul. Dibujó el cuadrado anaranjado agregándole 1 cm a cada lado del cuadrado azul.



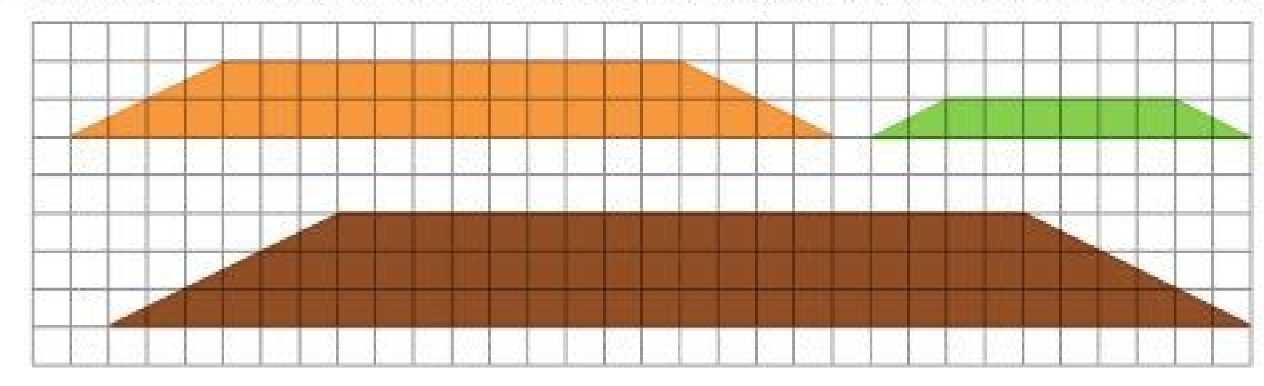
a. ¿Los cuadrados son semejantes? Explicá tu respuesta.

b. Si a partir de un rectángulo que tiene lados de 1 cm y 2 cm se construye otro agregándole 1 cm a cada lado, como hizo Sofía, ¿el segundo rectángulo es semejante al primero? Explicá tu respuesta.

**7.** Decidan en parejas, sin usar la regla graduada, si los polígonos son semejantes.



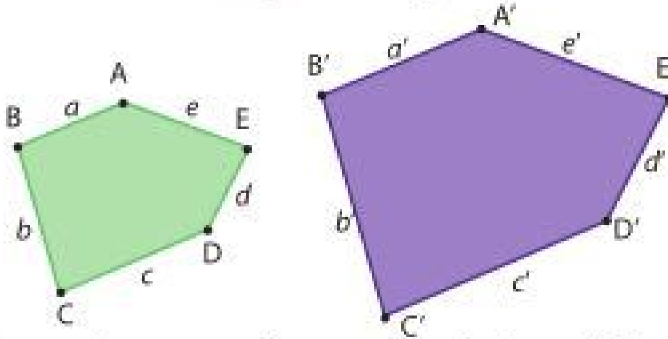
**8.** a. Decidan en parejas, sin usar la regla graduada, si los polígonos son semejantes.



b. ¿Existe algún número tal que, al multiplicar las medidas de los lados del polígono anaranjado por ese número, se obtengan las medidas de los lados del polígono marrón?

Si se duplican las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo, la medida de la hipotenusa también se duplica. Lo mismo ocurre si se triplica la medida de cada cateto. En general, si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $c$ y se multiplica la medida de los catetos por un número $k$, la nueva hipotenusa mide $k \cdot c$. Pueden usar esta propiedad para resolver las actividades 7 y 8. Más adelante se verá por qué es válida.

Se llaman **lados homólogos** a los lados correspondientes de dos polígonos semejantes. Por ejemplo, en estos dos pentágonos semejantes, $\overline{A'B'}$ es el homólogo de $\overline{AB}$ y $\overline{E'D'}$ es el homólogo de $\overline{ED}$.




Cada lado del pentágono verde se multiplicó por 1,5 para obtener el lado homólogo del pentágono violeta. Es decir que el cociente entre lados homólogos siempre da 1,5. Esto se escribe así:

$a \cdot 1{,}5 = a'$ $\quad b \cdot 1{,}5 = b'$ $\quad c \cdot 1{,}5 = c'$ $\quad d \cdot 1{,}5 = d'$ $\quad e \cdot 1{,}5 = e'$

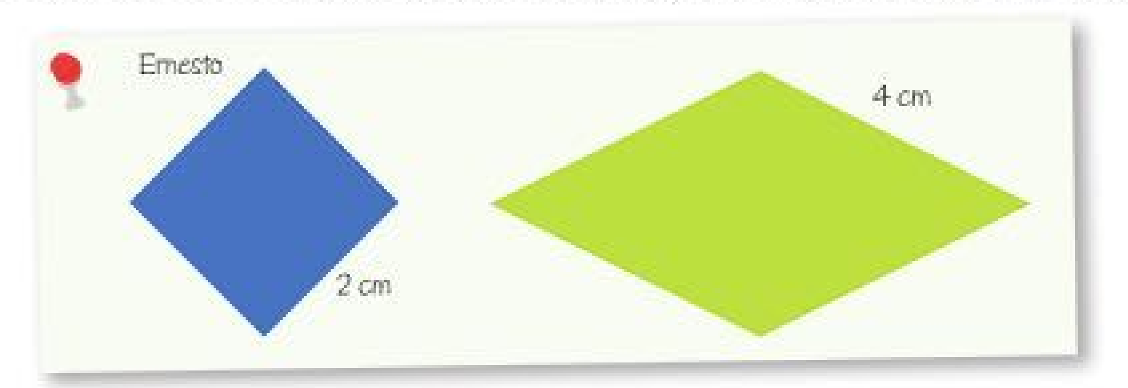
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = 1{,}5$$

En general, si dos polígonos son semejantes, existe un número $k$ tal que, al multiplicar la longitud de cada lado de uno de los dos polígonos por $k$, se obtiene la longitud de cada lado homólogo del otro polígono. Es decir que el cociente entre las longitudes de los lados homólogos es constante y esa constante es el número $k$, al que se denomina **razón de semejanza**. Este número no puede ser 0, porque si fuera 0, una de las figuras no existiría, ya que sus lados tendrían que medir 0.
Por ejemplo, en la actividad 8 la reducción del polígono anaranjado al verde tiene una razón de semejanza igual a 0,5 y la ampliación del verde al anaranjado tiene una razón de semejanza igual a 2.

La razón de semejanza no tiene unidad de medida. Al hacer el cociente de dos lados homólogos para calcularla, las longitudes de los lados deben estar expresadas en la misma unidad.

Si $k = 1$, no hay ampliación ni reducción, las figuras son iguales.

**9.** Luca dice que dos polígonos son semejantes si al dividir las medidas de los lados correspondientes da un número fijo. Ernesto le contesta que eso no es cierto y dibuja este cuadrado de lados de 2 cm y este rombo de lados de 4 cm.




a. ¿Son semejantes las figuras? ¿Es cierto entonces lo que dijo Luca?

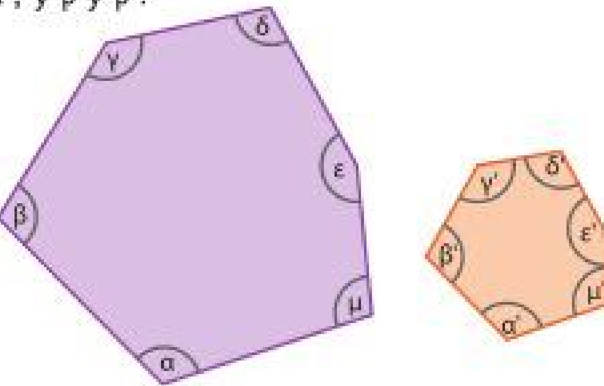
..........

b. En caso de no serlo, ¿qué otra condición deben cumplir para ser semejantes?

..........




Dados dos polígonos semejantes, llamaremos **ángulos homólogos** a los ángulos comprendidos entre pares de lados homólogos. Por ejemplo, para estas dos figuras semejantes, dos pares de ángulos homólogos son α y α', y β y β'.




En la actividad 9 analizaron que no alcanza con que los cocientes entre los lados correspondientes sean iguales para afirmar que los dos polígonos son semejantes. Se necesita algo más.
Dos **polígonos** son **semejantes** si hay una correspondencia entre los lados de uno y los lados del otro que cumple estas dos condiciones.

- Los cocientes entre las longitudes de lados correspondientes de los dos polígonos son iguales.
- Cada ángulo de un polígono es igual al ángulo que está comprendido entre los lados correspondientes a los lados del primer ángulo.

El cuadrado y el rombo de la actividad 9 cumplen la primera condición, pero no la segunda, por lo tanto no son semejantes.

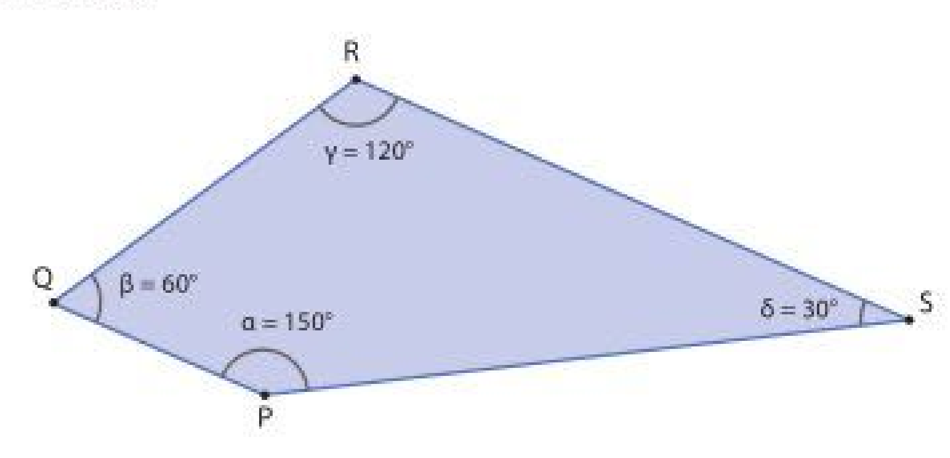
**10.** Justificá, usando los instrumentos de geometría que consideres necesarios, por qué, en la actividad 1, la foto no es una reducción de la otra.

..........................................................................................

..........................................................................................

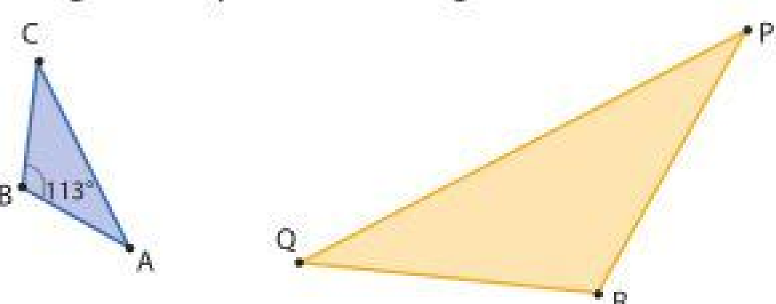
..........................................................................................

**11.** Construí en tu carpeta un cuadrilátero cuyos ángulos interiores sean iguales a los de PQRS, pero que no sea semejante. Construí otro polígono que sí sea semejante a PQRS.



**12.** El triángulo ABC es isósceles, $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm. El triángulo PQR es semejante al triángulo ABC, $\overline{QP} = 25$ cm y $\overline{QR} = 15$ cm. Hallá la medida del tercer lado del triángulo PQR y de sus tres ángulos interiores.

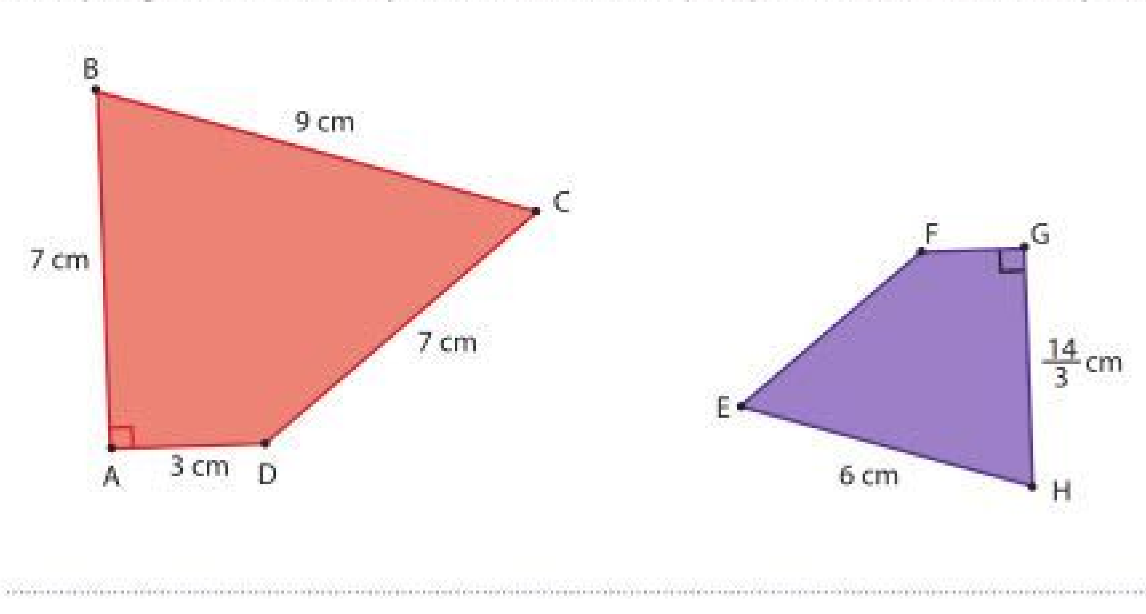
Las figuras de las actividades 12 y 13 no respetan las medidas indicadas; por lo tanto, no se podrá medir sobre estas figuras.




.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

**13.** Estos polígonos son semejantes. Calculen en parejas las medidas de $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$.




.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

**14.** Con un compañero decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen sus decisiones.

a. Todos los rectángulos son semejantes.

.................................................................................................................................

b. Todos los cuadrados son semejantes.

.................................................................................................................................

c. Todos los rombos son semejantes.

.................................................................................................................................

d. Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

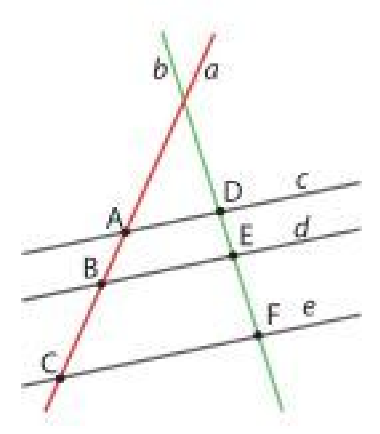
.................................................................................................................................

e. Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

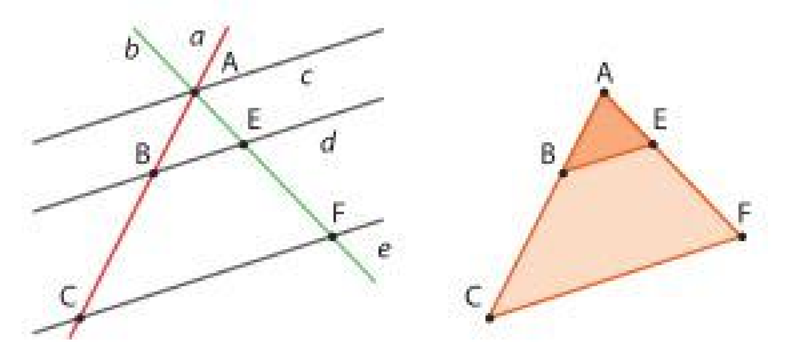
.................................................................................................................................

# Teorema de Thales y semejanza de triángulos

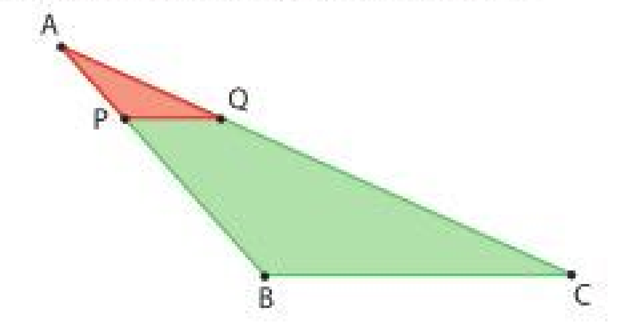
Thales fue uno de los grandes geómetras griegos del siglo VI a. C.
Se le atribuye haber descubierto que si se trazan tres rectas paralelas *c*, *d* y *e*, y dos transversales *a* y *b*, se cumple que el cociente entre dos segmentos cualesquiera que estén sobre una de estas rectas transversales es igual al cociente entre los dos segmentos correspondientes de la otra recta transversal.




Es decir que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ y $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$.
Esta propiedad se conoce como **teorema de Thales**. Se puede enunciar otra versión del teorema: si las rectas *a* y *b* se cortan sobre la recta *c*, formándose el triángulo ACF, con $\overline{BE}$ paralelo a $\overline{CF}$, entonces $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{BE}}$ y $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}}$.




**15.** Argumentá, sin medir, por qué los triángulos APQ y ABC son semejantes sabiendo que los segmentos PQ y BC son paralelos.



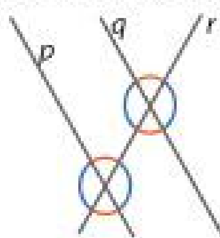

..........

..........

Thales nació en la ciudad de Mileto, que actualmente pertenece a Turquía, en 624 a. C. Sus escritos no han llegado hasta nuestros días, pero algunas de sus obras fueron recopiladas por Euclides. Se debe a Thales el mérito de haber introducido en Grecia el interés por los estudios geométricos.

Un **teorema** es una propiedad que puede ser justificada basándose en otras propiedades ya aceptadas y que se hizo conocida por sus aplicaciones dentro y fuera de la Matemática.

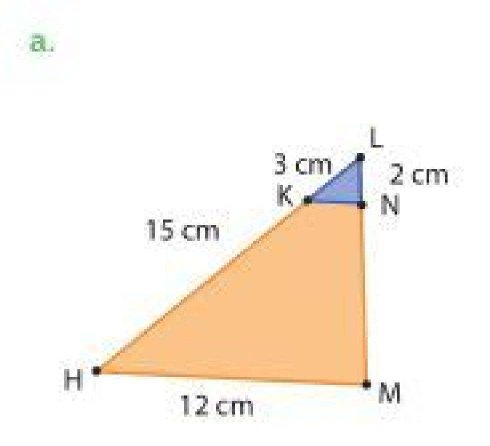
Si *p* y *q* son dos rectas paralelas y *r* es una recta transversal, quedan determinados ocho ángulos. Recuerden que todos los ángulos anaranjados son iguales entre sí y todos los azules son iguales entre sí. Además, cada ángulo azul es suplementario de cada ángulo anaranjado.



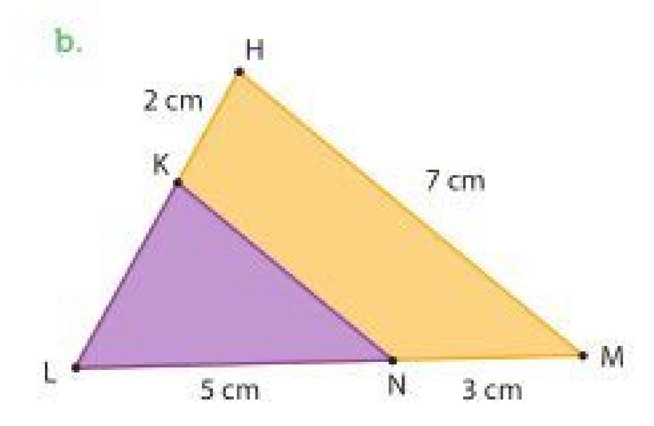
Lo que argumentaron en la actividad 15 se puede enunciar de manera general del siguiente modo.
**Si en un triángulo se traza una recta paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo semejante al primero.**

**16.** En cada triángulo HLM se trazó un segmento KN paralelo al lado HM y se obtuvo el triángulo semejante KLN. Para cada caso, en la carpeta, hallá, sin medir, las longitudes que faltan determinar de los lados de los triángulos y encontrá la razón de semejanza entre los triángulos HLM y KLN.

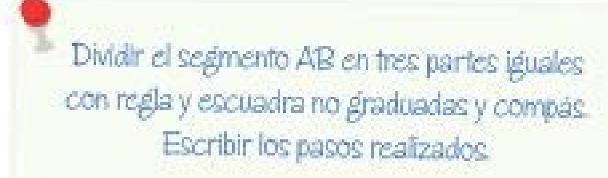
a.

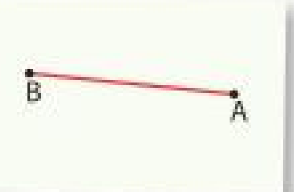



b.




**17.** Emma y Mora tienen que resolver este problema.


Dividir el segmento AB en tres partes iguales con regla y escuadra no graduadas y compás. Escribir los pasos realizados.




Emma lo resolvió de la siguiente manera.

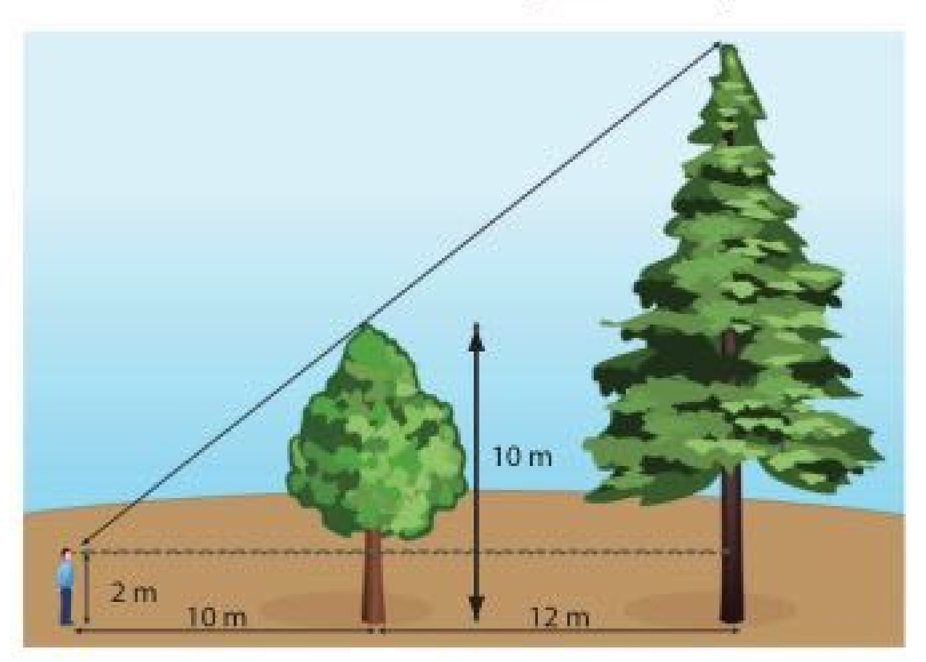
1. Tracé una recta r, de cualquier inclinación, que pasara por B.
2. Hice la circunferencia de centro B y radio 1 cm y marqué el punto D en la intersección de la recta r con la circunferencia.
3. Hice la circunferencia de centro D y radio 1 cm, y marqué el punto E en la intersección de r con la nueva circunferencia.
4. Hice la circunferencia de centro E y radio 1 cm, y marqué el punto F en la intersección de r con esta nueva circunferencia.



5. Tracé el segmento FA.
6. Con la regla y la escuadra tracé la recta paralela a $\overline{FA}$ que pasa por E y luego la recta paralela a $\overline{FA}$ que pasa por D.
7. Marqué las dos intersecciones entre las rectas y el segmento AB, y así este me quedó dividido en tres partes iguales.

Mora dijo que hizo lo mismo que Emma, pero sus circunferencias tenían un radio de 2 cm. Analizá con un compañero si los procedimientos son correctos. En caso de serlo, justifiquen por qué $\overline{AB}$ queda dividido en tres partes iguales.

**18.** Carlos quería medir dos árboles de su terreno. Con su escalera solo pudo medir el más bajo. Llamó a su amigo Eduardo, profesor de Matemática, y le preguntó cómo podía hacer para conocer la altura del árbol más alto. Eduardo le dijo que se ubicara en un lugar desde donde viera en línea recta las dos copas de los árboles e hiciera una marca justo entre sus pies; luego debía medir la distancia entre los dos árboles, la distancia entre el árbol más chico y la marca donde él estaba parado, y su altura. Le aseguró que con esas medidas podía calcular la altura del árbol más alto. Carlos hizo el siguiente dibujo.



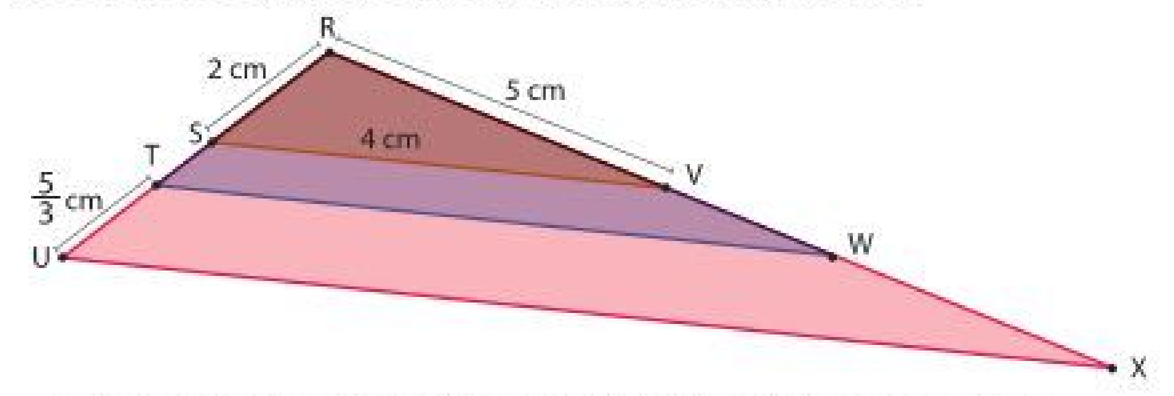

En grupos piensen cómo pueden usar el dibujo de Carlos para calcular la medida del árbol más alto.

............................................................

............................................................

............................................................

**19.** En la siguiente figura, los segmentos SV, TW y UX son paralelos. En parejas resuelvan las consignas en la carpeta sin hacer mediciones.




a. Justifiquen por qué los triángulos SRV, TRW y URX son semejantes.

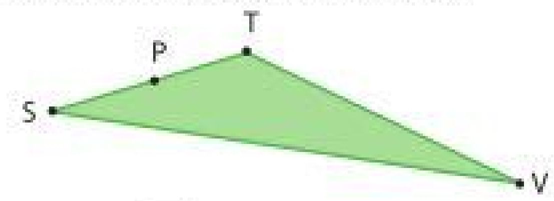
b. Sabiendo que la razón de semejanza entre el triángulo SRV y el TRW es $\frac{3}{2}$, hallen las longitudes de $\overline{ST}$, $\overline{VW}$, $\overline{WX}$, $\overline{TW}$ y $\overline{UX}$.

c. Averigüen la razón de semejanza entre los triángulos SRV y URX.

d. Averigüen la razón de semejanza entre los triángulos TRW y URX.

# Base media de un triángulo

**20.** En este triángulo, P es el punto medio del lado ST.

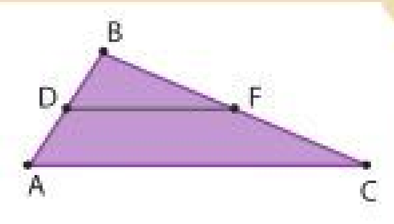



a. Trazá una recta paralela a $\overline{SV}$ que pase por P y llamá R al punto de intersección entre la recta y $\overline{TV}$.

b. Justificá, sin medir, por qué R también es el punto medio de $\overline{TV}$.

c. Justificá, sin medir, por qué la longitud de $\overline{PR}$ es la mitad de la de $\overline{SV}$.

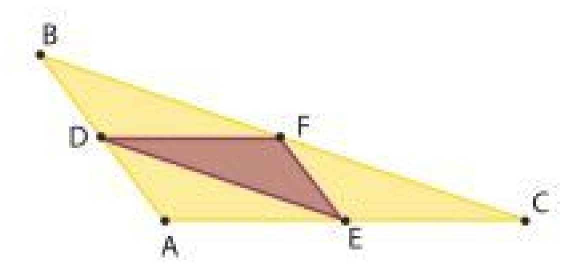
En un triángulo ABC, el segmento DF se llama **base media** relativa al lado AC, donde D es punto medio de $\overline{AB}$ y F es punto medio de $\overline{BC}$. Todos los triángulos tienen tres bases medias, cada una relativa a un lado.




Por lo estudiado en la actividad anterior, la recta paralela a $\overline{AC}$ que pasa por D también pasa por F. Esto nos permite afirmar que la base media relativa a un lado de un triángulo es siempre paralela a ese lado.



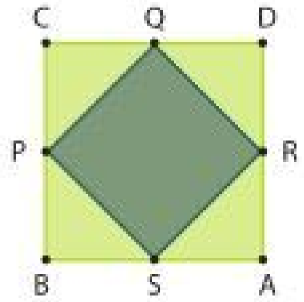
**21.** En el siguiente triángulo, D, E y F son los puntos medios de los lados. Sin medir, resolvé las consignas con un compañero.




a. ¿Es cierto que los cuatro triángulos resultantes son congruentes?

b. ¿El triángulo DFE es semejante al triángulo ABC?

**22.** En este cuadrado se marcaron los puntos medios de los lados. Francisco dice que el cuadrilátero PQRS es un cuadrado. Para justificarlo, trazó las diagonales AC y BD, y usó lo que había aprendido sobre las bases medias de los triángulos. Pensá con un compañero cuál fue la justificación de Francisco.

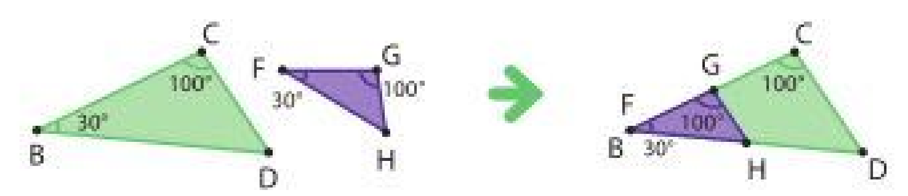



Recuerden que para afirmar que un cuadrilátero es un cuadrado tienen que justificar que los cuatro lados son iguales y los cuatro ángulos interiores son rectos.

## Criterios de semejanza de triángulos

**23.** Si es posible, dibujá en una hoja lisa, usando regla y transportador, dos triángulos que no sean semejantes y que tengan dos ángulos interiores de 30° y 100°.

Si un triángulo tiene dos de sus ángulos respectivamente iguales a dos ángulos de otro triángulo, se puede ubicar uno de ellos dentro de otro de manera de superponer dos lados y el ángulo determinado. Por ejemplo, en la actividad anterior se pueden superponer los dos ángulos de 30°. Pueden recortar sus triángulos para verificarlo.




Al hacer esto resulta que $\overline{GH}$ es paralelo a $\overline{CD}$ porque hay un par de ángulos correspondientes iguales, los dos que miden 100°. Entonces se puede usar el teorema de Thales: sabemos que $\frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{BD}}$. Además, el tercer ángulo de ambos triángulos es 50°, porque la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°. En conclusión, los dos triángulos cumplen las dos condiciones de la definición de figuras semejantes, por lo tanto son semejantes.
En general, **si un triángulo tiene dos ángulos respectivamente iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces son semejantes**.

Además de los criterios de congruencia de triángulos, también hay **criterios de semejanza de triángulos**. Estos son conjuntos de condiciones que garantizan que dos triángulos son semejantes sin necesidad de verificar que todos los lados correspondientes sean proporcionales y todos los ángulos de un triángulo sean iguales a los del otro.



**24.** Usá el programa GeoGebra, seguí el instructivo y hacé la construcción. Entre paréntesis se indica el nombre que el programa le da a cada objeto.

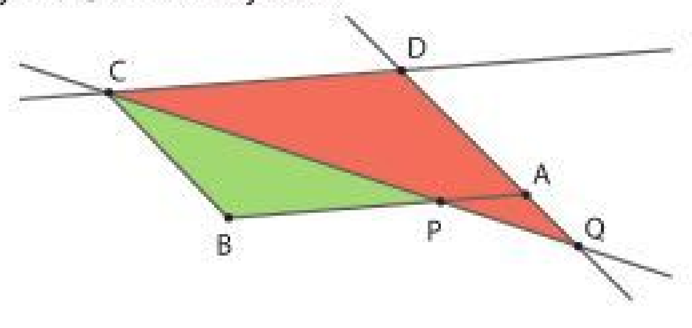
1. Trazar una recta (f) utilizando la herramienta Recta. Los puntos A y B quedarán movibles.
2. Con la misma herramienta trazar otra recta (g) que corte a f. Los puntos D y C también quedarán movibles.
3. Utilizar la herramienta Intersección para marcar el punto de intersección (E) de las rectas f y g.
4. Utilizar la herramienta Recta para trazar la recta (h) que pasa por los puntos B y D.
5. Utilizar la misma herramienta para trazar la recta (i) que pasa por los puntos A y C.

a. Moviendo solo el punto C, intentá que los triángulos DEB y AEC sean semejantes.

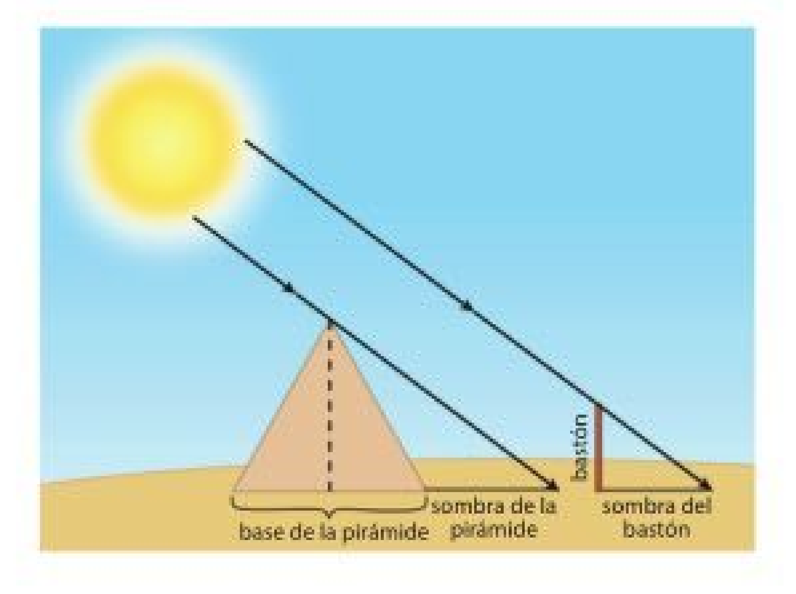
b. Discutan y respondan entre todos: ¿cuáles son todos los lugares donde puede estar el punto C para lograr que los dos triángulos sean semejantes?

Recordá que con las herramientas "Ángulo" y "Distancia" podés medir los ángulos y los segmentos. También podés utilizar la herramienta "Polígono" para visualizar mejor los triángulos DEB y AEC.

**25.** De esta figura se sabe que ABCD es un paralelogramo. Argumentá por qué los triángulos CBP y CDQ son semejantes.




**26.** En su juventud, Thales viajó a Egipto. En ese tiempo las pirámides tenían unos 2.000 años. Cuenta la leyenda que Thales pudo medir la altura de la pirámide de Keops clavando un bastón en la arena.
Los rayos de sol que inciden en la pirámide y en el bastón son paralelos (se consideran paralelos debido a la gran distancia que separa al Sol de la Tierra). Supongamos que a una hora determinada del día la sombra de la pirámide medía 165 metros y la sombra del bastón medía 2,87 metros. Si el bastón medía 1,5 metros y Thales sabía que la pirámide de Keops tiene base cuadrada con lados de 230 metros, ¿cómo pudo calcular la altura de la pirámide?



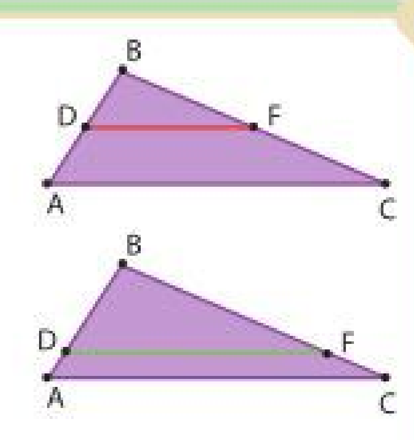

**27.** En parejas, resuelvan las consignas trazando los triángulos en una hoja lisa.

a. Tracen un triángulo ABC que cumpla: $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm y $\overline{CA} = 5$ cm.

b. Multipliquen por 1,5 la longitud de cada lado y tracen un nuevo triángulo con esas tres nuevas medidas como longitudes de los lados.

c. Dibujen un tercer triángulo cuyos lados midan el doble que los lados del primer triángulo trazado.

d. Estudien si los tres triángulos son semejantes.




En la página 129 vimos que si D y F son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y BC de un triángulo ABC, resulta que $\overline{DF}$ es paralelo a $\overline{AC}$. Esta propiedad vale en condiciones más generales: si al trazar un segmento que une un punto D de un lado de un triángulo con un punto F de otro lado se cumple que $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}$, entonces resulta que $\overline{DF}$ es paralelo al tercer lado, $\overline{AC}$.

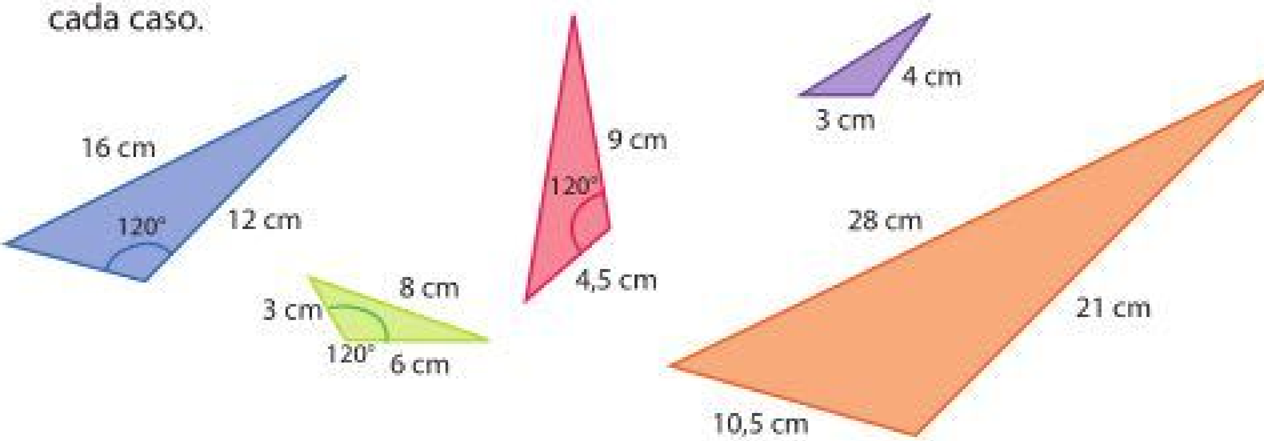
Esta propiedad se conoce como **recíproco del teorema de Thales**.

Gracias a esta propiedad podemos argumentar que si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los ángulos de un triángulo son respectivamente iguales a los ángulos del otro triángulo. Esto se puede validar usando las propiedades de los ángulos entre paralelas. Esto genera un nuevo criterio de semejanza de triángulos: **si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces resultan semejantes**.

Por esto, en la actividad 27, las medidas tomadas de los ángulos interiores de los tres triángulos eran aproximadamente iguales. Las diferencias eran producidas por los errores de medición, ya que este criterio garantiza que esos tres triángulos son semejantes.

Otro criterio de semejanza conocido es: **si dos triángulos tienen un par de lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual, entonces son semejantes**.

**28.** Analizá con tu compañero, sin medir, cuáles de estos triángulos son semejantes, cuáles podrían serlo y cuáles no son semejantes. Justifiquen en cada caso.




**29.** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $t$ cm. Justificá por qué si a cada cateto se lo multiplica por un número $k$, se obtiene un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $k \cdot t$.



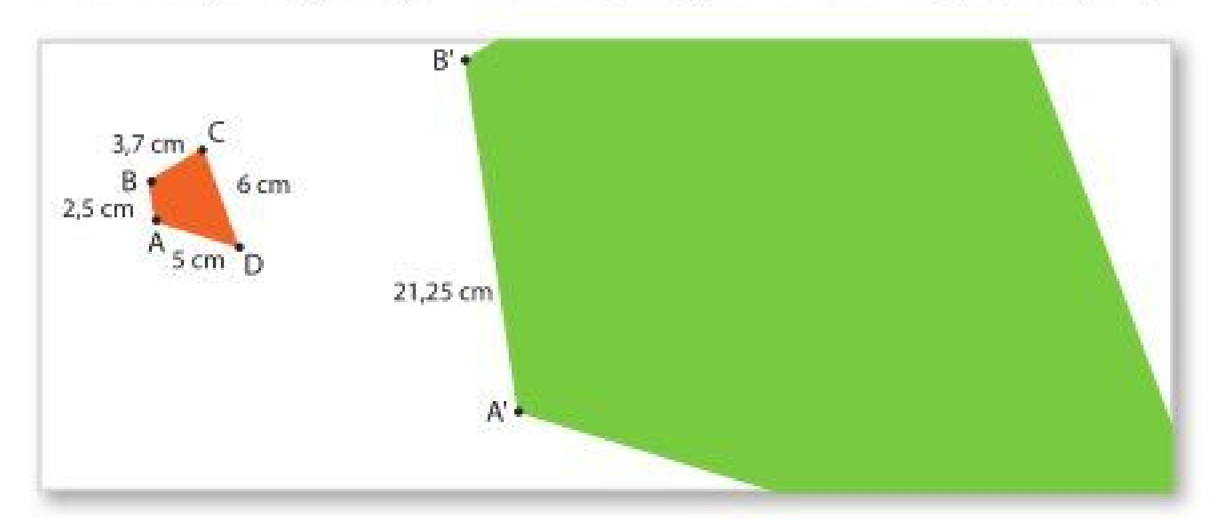
# Perímetro y área de figuras semejantes

**30.** a. En la actividad 28 concluyeron que los triángulos verde, marrón y naranja son semejantes. Completá esta tabla. En cada columna debés ubicar las medidas de los lados homólogos y, luego, calcular el perímetro.

| Triángulo | Medida de lado 1 | Medida de lado 2 | Medida de lado 3 | Perímetro |
|---|---|---|---|---|
| Verde | 3 cm | 6 cm | 8 cm | |
| Marrón | 4,5 cm | 9 cm | | |
| Naranja | 10,5 cm | 21 cm | 28 cm | |

b. En parejas piensen si es posible calcular el perímetro del triángulo marrón conociendo solamente estos dos datos: el perímetro del triángulo verde y la razón de semejanza para ampliar el triángulo verde al marrón. Justifíquenlo.

**31.** La profesora de León le da este dibujo y le dice que calcule el perímetro del polígono verde que no entró completamente en la hoja. Le aclara que es semejante al polígono anaranjado y que el lado homólogo a $\overline{AB}$ mide 21,25 cm. León responde que es imposible calcular el perímetro. Julián, un compañero de León, dice que sí es posible, aunque esté incompleto. ¿Coincidís con Julián? Si coincidís, averiguá el perímetro del polígono verde. Si no, explicá por qué.



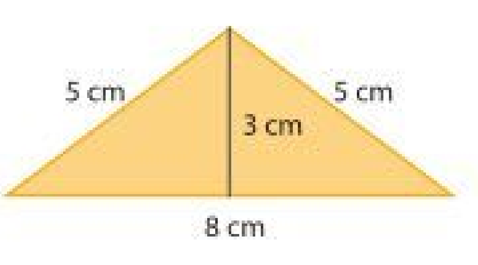

..........

..........

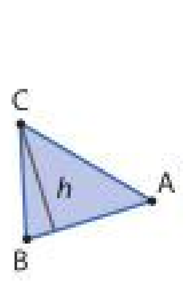
**32.** Se tiene un polígono de 5 lados cuyas longitudes son *a*, *b*, *c*, *d* y *e*. Se quiere construir otro semejante con una razón de semejanza *k*. En la carpeta, averiguá con un compañero el perímetro del nuevo polígono.

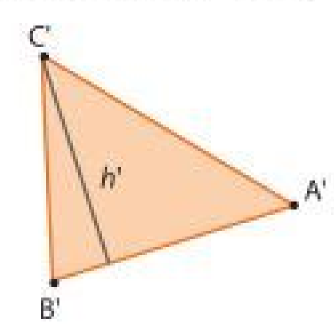
La conclusión a la que arribaron en la actividad 32 se puede generalizar para dos polígonos semejantes cualesquiera. Si la razón de semejanza entre ellos es *k*, se puede calcular un perímetro a partir del otro con la expresión $P' = k \cdot P$, en la que P y P' son los perímetros de los polígonos.

**33.** Malena tenía que calcular el área de un triángulo semejante a este con razón 2. Dijo que no hacía falta dibujarlo porque el área del triángulo anaranjado era 12 cm², por lo tanto el área del semejante sería de 24 cm². Estudiá si es cierto el razonamiento de Malena.



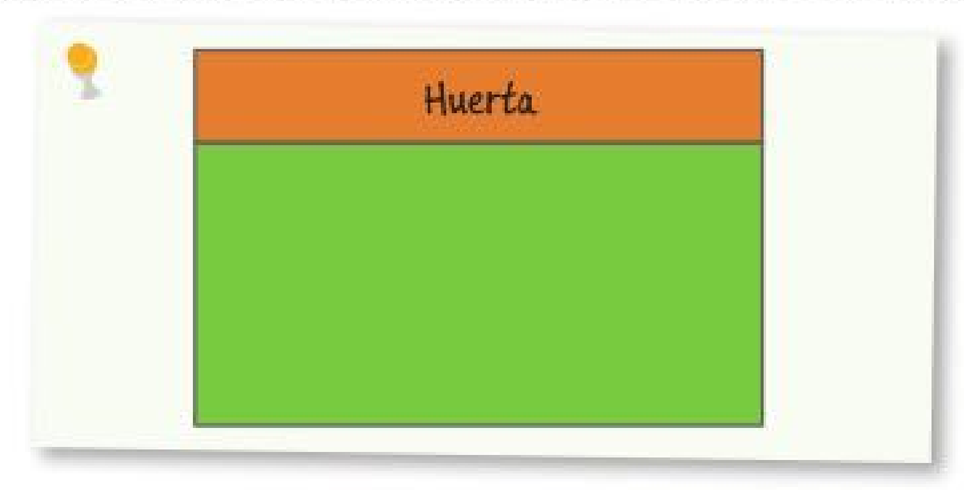

**34.** El triángulo azul se amplió para obtener el triángulo anaranjado, y la razón de semejanza es $k$. Argumentá con un compañero que $h' = k \cdot h$.




Al calcular las áreas de los triángulos de la actividad 34 tenemos que: área del ABC $= \frac{b \cdot h}{2}$ y área del A'B'C' $= \frac{k \cdot b \cdot k \cdot h}{2} = \frac{k^2 \cdot b \cdot h}{2}$, donde $b$ es la longitud del lado AB.
Entonces podemos afirmar que área del A'B'C' $= k^2 \cdot$ área del ABC.
Como todo polígono puede descomponerse en triángulos, podemos afirmar que si dos polígonos son semejantes y su razón de semejanza es $k$, se puede calcular el área de uno en función de la del otro con la expresión $A' = k^2 \cdot A$, en la que A y A' son las áreas de los polígonos.

**35.** Claudio quería hacer una huerta en 2,4 m² de su jardín. Hizo el siguiente dibujo en una hoja lisa. Calculá las medidas del jardín de Claudio y de su huerta.



## Más actividades

**1.** Decidí si la foto de la derecha es una ampliación de la otra. Si lo es, hallá la razón de semejanza.





**2.** Mariana está primera en esta fila, mide 1,62 metros. ¿Cuánto miden las otras personas?



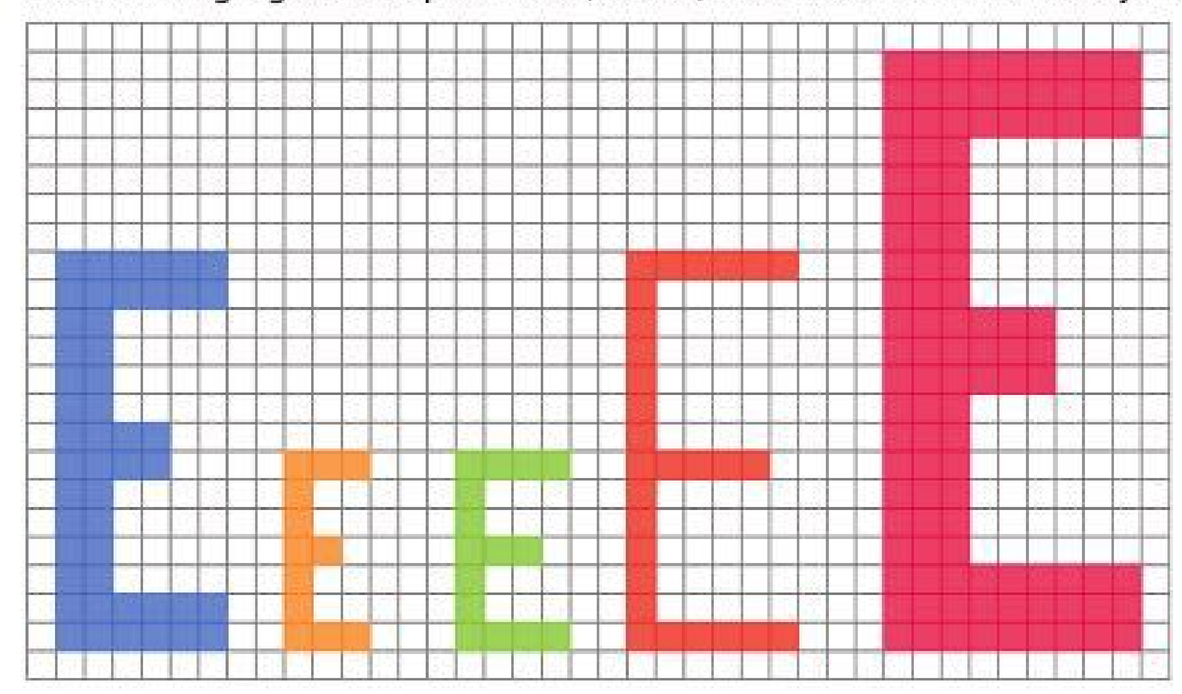
.......................................................................

.......................................................................

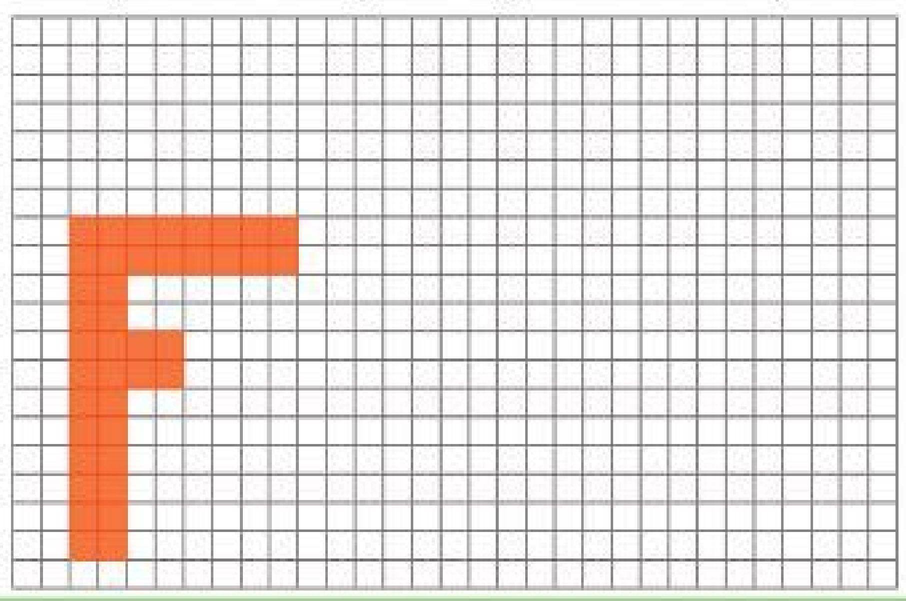
.......................................................................

.......................................................................

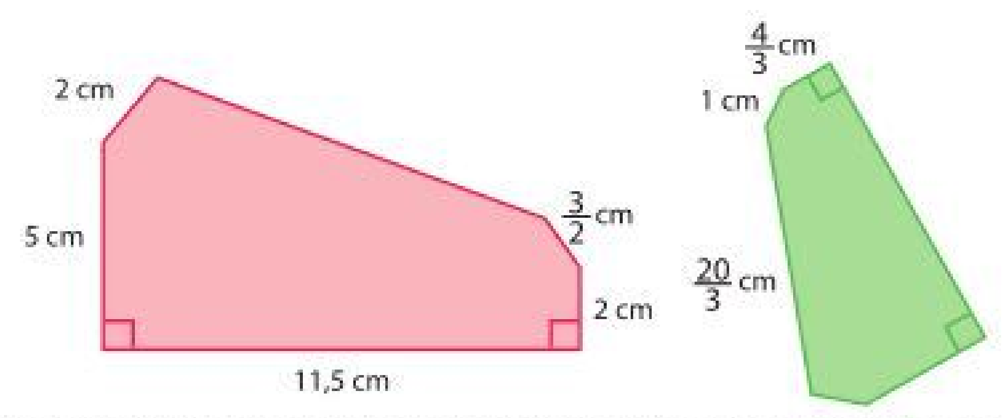
**3.** Sin usar la regla graduada para medir, decidí, cuáles de estas E son semejantes.



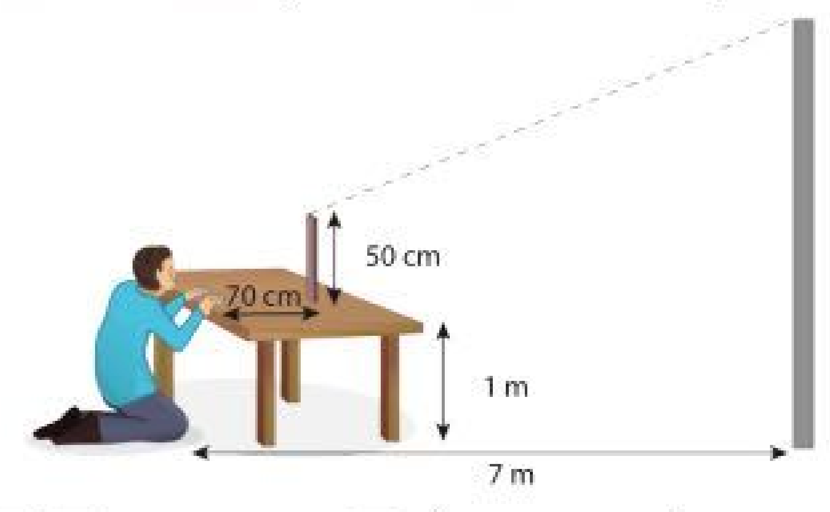
**4.** Sin usar la regla graduada para medir, dibujá una ampliación de la F cuya razón de semejanza sea 1,5.



**5.** El polígono verde es semejante al rojo. Hallá las medidas de los lados que faltan.



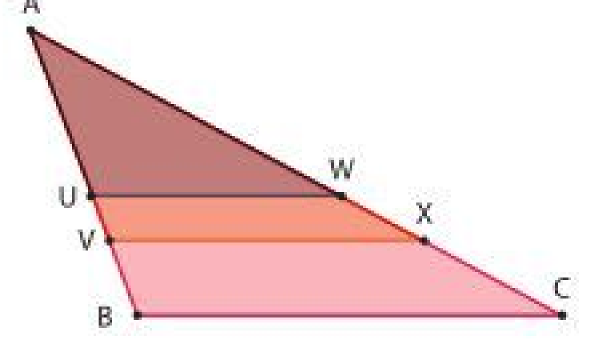

**6.** Emiliano quería medir la altura de una pared de su terraza y se le ocurrió poner una varilla sobre una mesa. Luego tomó estas medidas. ¿Cuánto mide la altura de la pared?




**7.** En esta figura, $\overline{UW}$, $\overline{VX}$ y $\overline{BC}$ son paralelos y $\overline{AU} = \frac{5}{2}$ cm, $\overline{AB} = \frac{35}{8}$ cm, $\overline{WX} = \frac{5}{4}$ cm, $\overline{AW} = 5$ cm y $\overline{BC} = \frac{49}{8}$ cm.

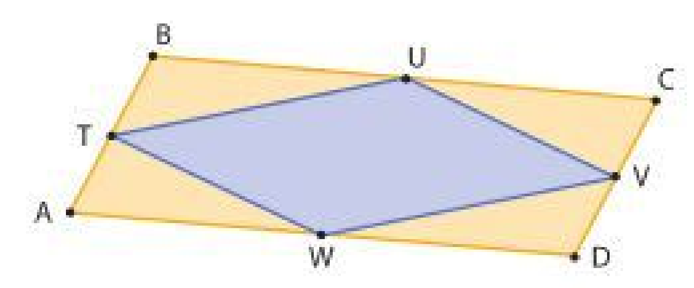
a. Hallá las longitudes de $\overline{UV}$, $\overline{XC}$, $\overline{UW}$ y $\overline{VX}$.



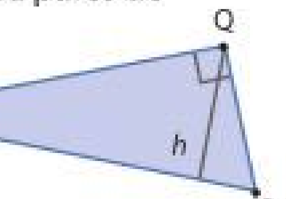



b. Hallá la razón de semejanza entre los triángulos UAW y VAX, y la razón de semejanza entre los triángulos UAW y BAC.

**8.** T, U, V y W son los puntos medios de los lados del paralelogramo ABCD. ¿El cuadrilátero TUVW también es un paralelogramo? Justificá tu respuesta sin medir.

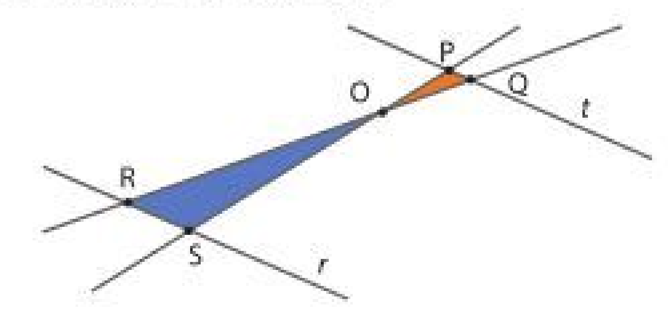


**9.** En el triángulo rectángulo PQR, *h* es la altura relativa al lado PR. Sin medir, encontrá pares de triángulos semejantes. Justificá tu respuesta.




**10.** Los lados de un triángulo miden 3 cm, 5 cm y 7 cm. Se construyó un triángulo semejante en el que el lado de mayor longitud mide $\frac{35}{2}$ cm. Hallá la medida de los otros dos lados.

**11.** En la siguiente figura, las rectas *r* y *t* son paralelas.

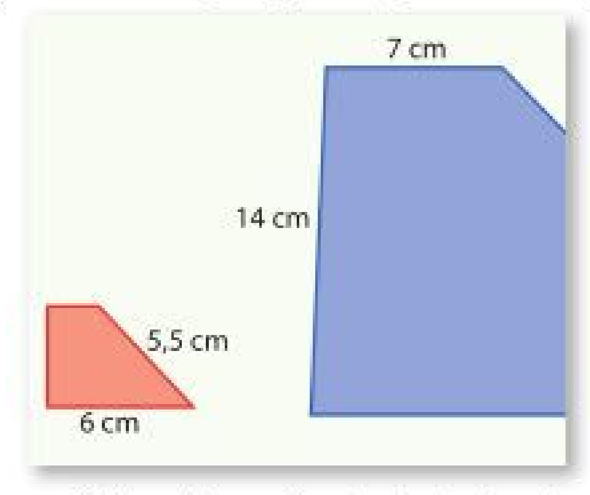



a. Justificá, sin medir, por qué los triángulos POQ y ROS son semejantes.

b. Se sabe que $\overline{OP} = 5$ cm, $\overline{PQ} = \frac{3}{2}$ cm, $\overline{OQ} = 6$ cm y $\overline{OS} = 12,5$ cm. Calculá las longitudes de los otros dos lados del triángulo ROS.

c. ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos POQ y ROS?

**12.** Este cuadrilátero azul se dibujó en una hoja y no se pudo completar, pero se sabe que es semejante al cuadrilátero rojo. El perímetro del polígono rojo es 17,5 cm y el del polígono azul es 61,25 cm.




a. Hallá las longitudes que faltan determinar de los lados de ambos polígonos.

b. El área del cuadrilátero rojo es 16 cm². ¿Cuánto mide el área del cuadrilátero azul?

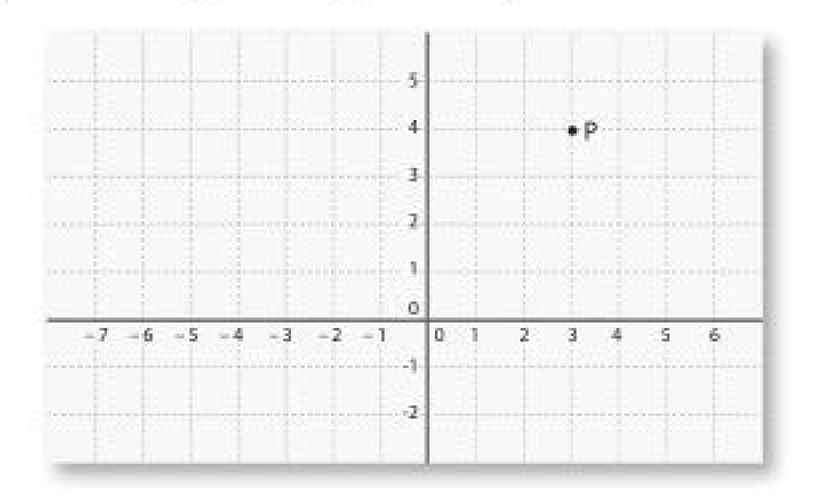
**13.** El cociente entre las áreas de dos triángulos semejantes es $\frac{25}{4}$. Si la altura de uno de ellos mide 7 cm, ¿cuánto puede medir la altura del otro triángulo?




**Ecuaciones lineales:** regiones en el plano coordenado, ecuaciones e inecuaciones lineales con dos variables, sistemas de ecuaciones.

# Ecuación de la recta y sistema de ecuaciones

**1.** La siguiente imagen muestra la pantalla del radar de un barco en la que se puede distinguir un objeto en el punto P de coordenadas (3 ; 4).




a. Ubicá en la imagen anterior un objeto que se encuentre en el punto (–4 ; –1) y otro en el punto (5 ; 0).

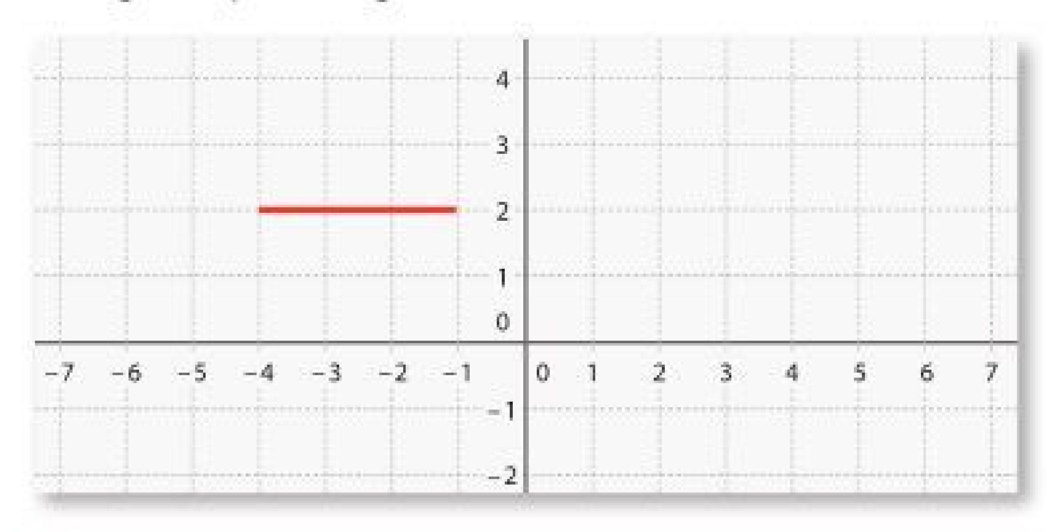
b. Ubicá un objeto en un punto Q, de manera que su ordenada sea igual a la de P, pero cuya abscisa sea menor. Escribí las coordenadas del punto Q.

Un radar es un sistema que usa ondas electromagnéticas para determinar la ubicación de objetos, tales como barcos, boyas, islas, etcétera. Resulta importante para la navegación conocer la ubicación de dichos objetos para definir el rumbo de una nave.




## Rectas y segmentos en el plano cartesiano

**2.** La siguiente imagen de radar muestra la presencia de un objeto, representado en el gráfico por un segmento.



a. En parejas, redacten en su carpeta un mensaje para que otro, que no ve la imagen, pueda saber dónde está el objeto.

b. Ulises propuso el siguiente mensaje: "Son los puntos donde la coordenada *y* es igual a 2". ¿Estás de acuerdo con Ulises? ¿Por qué?



**3.** Decidí cuáles de estas condiciones representan a cada gráfico.

$y = 2$

$y = -2$
$x$ entre 1 y 6

$x = -3$
$1 \leq y \leq 3$

$y = -2$

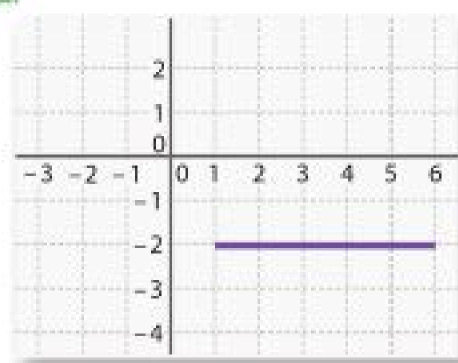
$x = -3$
$-2 \leq y \leq 4$

$x = 2$

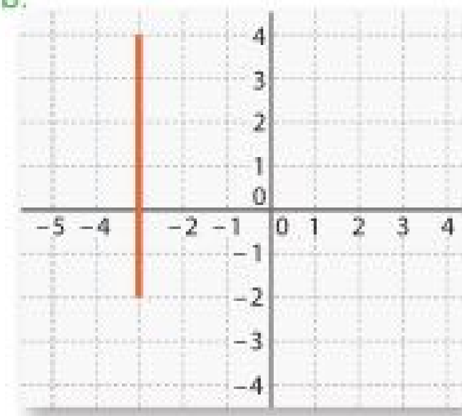
$x = -3$

$x = -3$
$0 \leq y \leq 3$

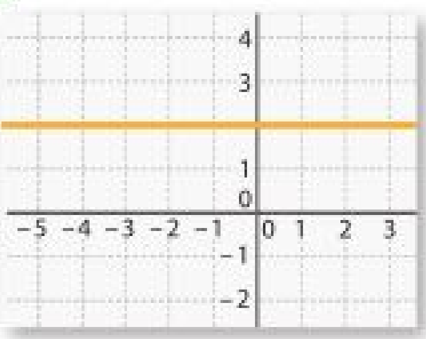
a.



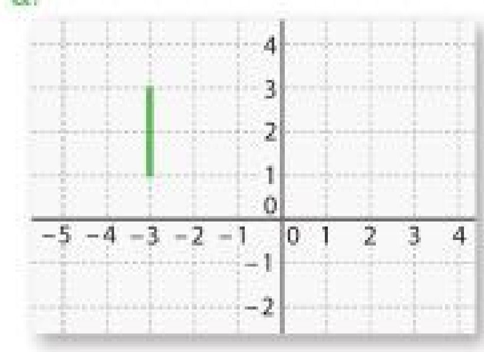
b.



c.

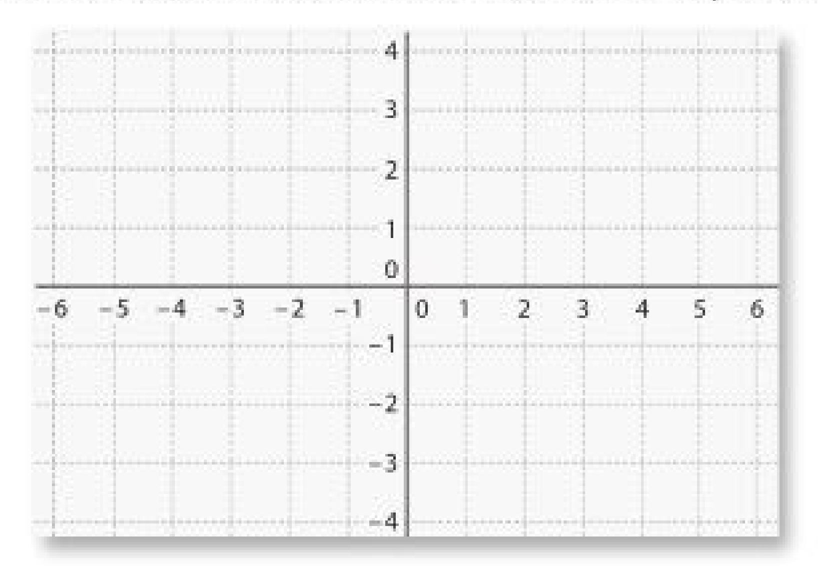


d.






**4.** En este sistema de ejes cartesianos, graficá el conjunto de puntos que cumplen cada grupo de condiciones. Podés usar un color diferente para cada grupo.



a. $\begin{cases} x = -1 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$

b. $x = 5$

c. $\begin{cases} y = \frac{5}{2} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

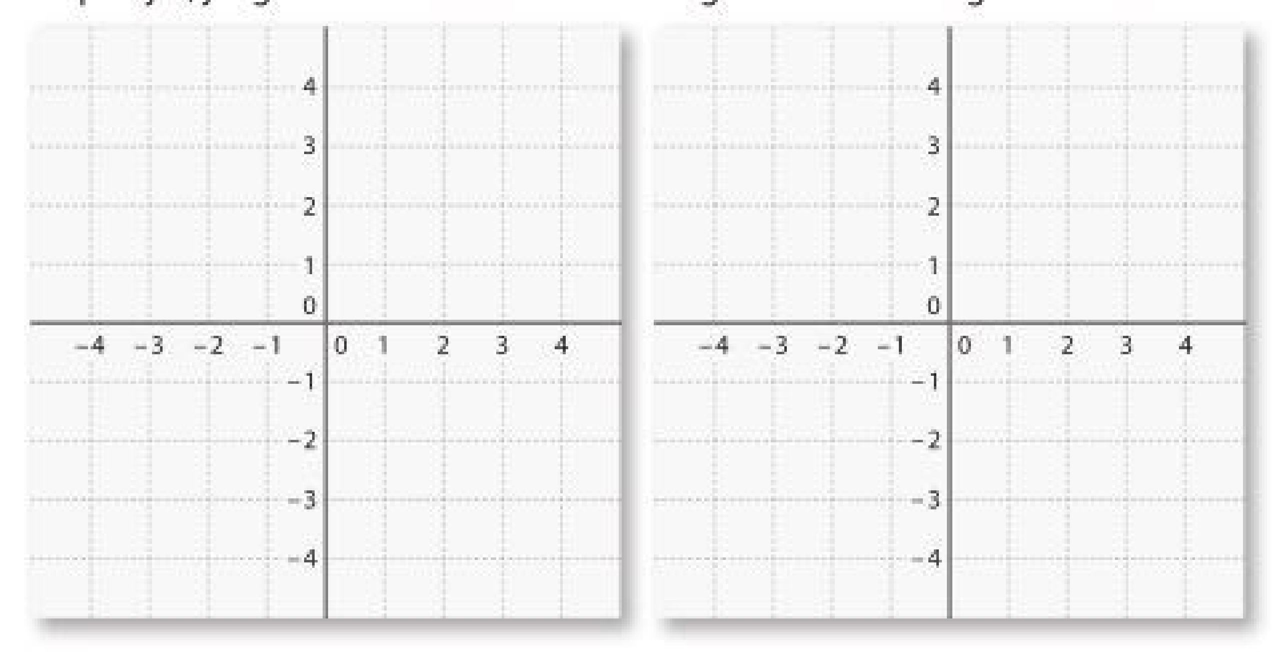
d. $y = -1{,}5$

La llave que agrupa cada conjunto de condiciones se usa para indicar que esas condiciones se deben cumplir simultáneamente. Por ejemplo, las condiciones $x = 5$, $y \leq 2$, también se puede escribir: $\begin{cases} x = 5 \\ y \leq 2 \end{cases}$.

**5.** El juego de la batalla naval con segmentos tiene el siguiente reglamento.

1. Se juega en parejas. Cada jugador tiene dos tableros. En uno coloca un barco y registra los disparos del oponente; en el otro registra los disparos propios.
2. Los barcos se representan con segmentos horizontales o verticales de 5 unidades de longitud y los disparos, con segmentos horizontales o verticales de 4 unidades de longitud.
3. Cada jugador dibuja su barco sin que el oponente lo vea y, por turnos, realizan los disparos. Para hacerlo, tienen que determinar un segmento de 4 unidades, dando por escrito las condiciones sobre las coordenadas de todos los puntos del segmento.
4. Gana el jugador que lanza un disparo que toque algún punto del barco de su oponente.

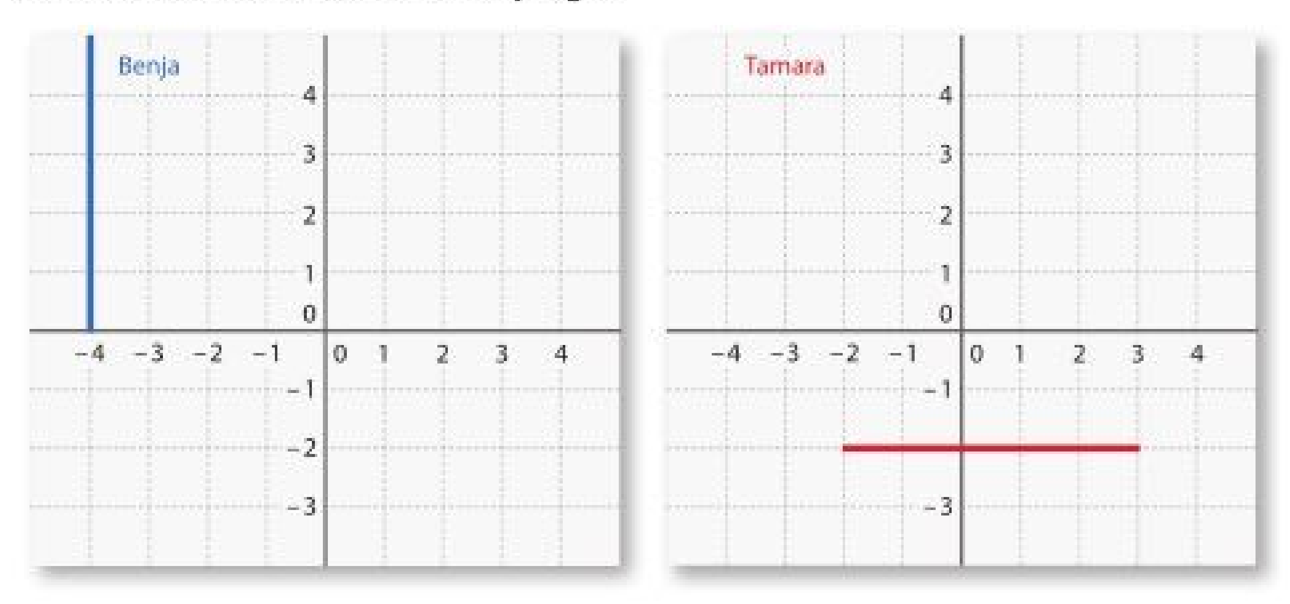
En parejas, jueguen a la batalla naval con segmentos en los siguientes tableros.






## Regiones en el plano cartesiano

**6.** Benja y Tamara jugaron una partida de la batalla naval con segmentos. Estos eran sus tableros al comenzar el juego.




Realizaron los siguientes disparos.

Tamara

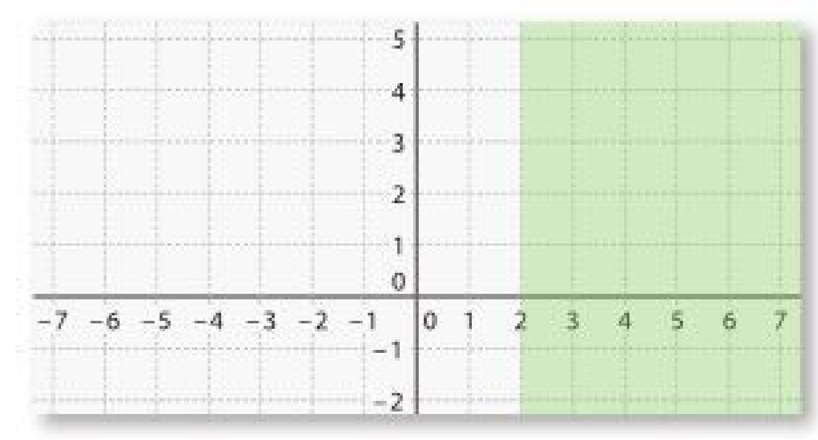
$\begin{cases} y = 1 \\ -3{,}5 \leq x \leq 0{,}5 \end{cases}$

Benja

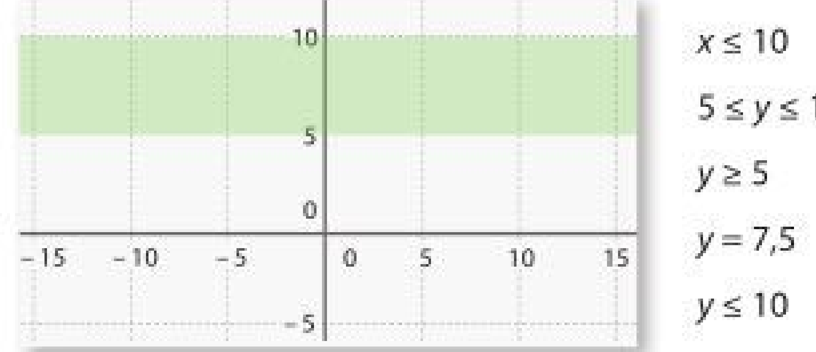
$\begin{cases} y = -3 \\ -5 \leq x \leq -1 \end{cases}$

¿Hubo un ganador? En caso afirmativo, decidí quién fue y, en caso negativo, pensá un posible disparo de cada uno que le haría ganar el juego.

**7.** ¿Es cierto que la descripción "son todos los puntos $(x\,;y)$ tales que $x \geq 2$", serviría para describir la siguiente imagen de radar? Explicá cómo te diste cuenta.



**8.** En parejas, decidan cuáles de las siguientes ocho condiciones sirven para describir la banda que muestra la imagen de radar.



$x \leq 10$

$5 \leq y \leq 10$

$y \geq 5$

$y = 7{,}5$

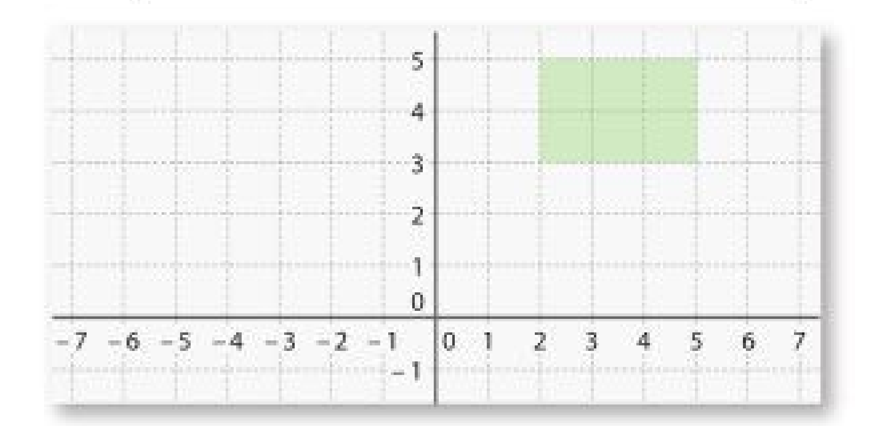
$y \leq 10$

$\begin{cases} x \leq 10 \\ x \geq 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 5 \leq y \leq 10 \\ 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

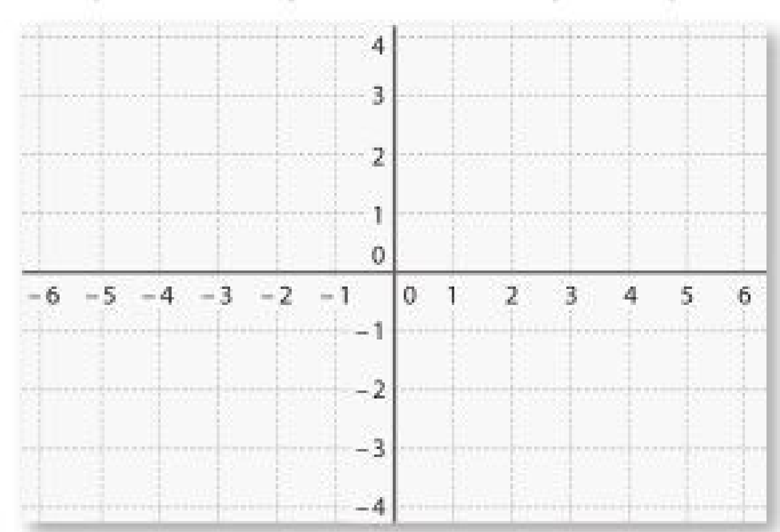
$\begin{cases} y \leq 10 \\ y \geq 5 \end{cases}$

**9.** Un radar indica la presencia de un objeto desconocido. En parejas, escriban condiciones sobre las coordenadas que caractericen a todos los puntos donde está ubicado el objeto. Discutan entre todos las condiciones que escribieron.



**10.** El operador del radar dice: "Atención. Se observa la presencia de un objeto desconocido, ubicado en puntos del plano que verifican la condición $x = y$, con…", y se corta la comunicación.

a. En parejas ubiquen, si es posible, dos lugares en cada cuadrante donde podría estar un punto del objeto identificado por el operador del radar.



Para recordar qué son los cuadrantes, volvé a leer la página 100.



b. La comunicación con el operador se reestablece y se llega a escuchar la descripción completa: "Repito, se observa la presencia de un objeto desconocido, ubicado en puntos del plano que verifican la condición $x = y$, con $1 \leq x \leq 3$." Grafiquen el objeto en el sistema de ejes anterior.

En las actividades anteriores estudiaron que, para describir una región del plano, se pueden usar una o varias ecuaciones y/o inecuaciones que explicitan las condiciones que cumplen las coordenadas de los puntos de la región. Por ejemplo, el segmento de la actividad 2 se puede representar con una ecuación y una inecuación: $\begin{cases} y = 2 \\ -4 \leq x \leq -1 \end{cases}$.
El segmento está compuesto por todos los puntos cuyas coordenadas verifican esas dos condiciones: la ecuación sobre la coordenada $y$ y la inecuación sobre la coordenada $x$, simultaneamente. El semiplano de la actividad 7 se puede caracterizar con una sola condición: la inecuación $y \geq 2$, mientras que la banda de la actividad 8 se puede representar con las inecuaciones $5 \leq y \leq 10$.

## Ecuación lineal con dos variables

**11.** Los integrantes de la cooperadora de una escuela pintaron las mesas y las sillas usando pomos de pintura. Necesitaron 1 pomo para cada silla y 3 pomos para cada mesa. Usaron los 35 pomos que tenían y no sobró pintura.

a. ¿Es posible que hayan pintado 8 mesas y 11 sillas?¿Y 15 sillas y 5 mesas?

b. ¿Es posible que hayan pintado únicamente mesas?

c. Si pintaron 8 sillas, ¿cuantás mesas habrán pintado?

d. Si pintaron 4 mesas, ¿cuántas sillas habrán pintado?

e. ¿Cuáles son todas las cantidades de sillas y mesas que pueden haber pintado?

f. En cada una de las siguientes ecuaciones, *m* representa la cantidad de mesas y *s* la cantidad de sillas. Decidí cuáles representan la condición sobre la cantidad de mesas y sillas pintadas.

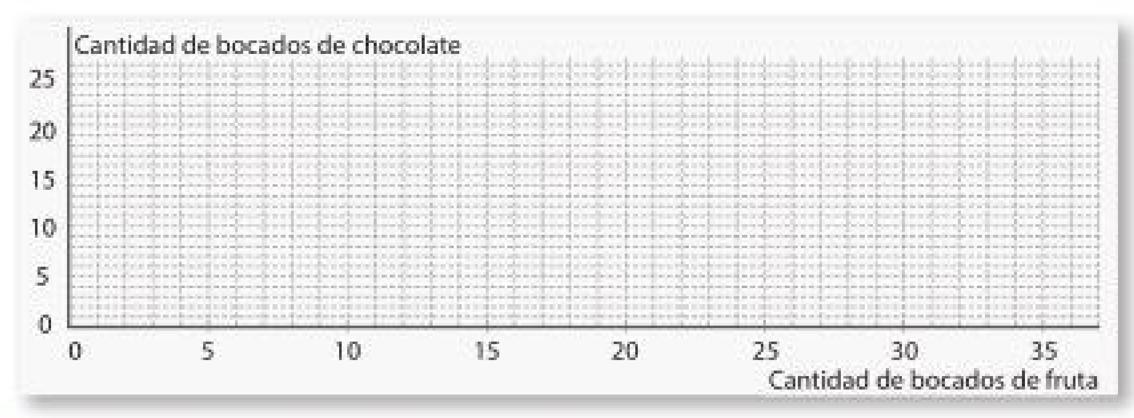
$m + s = 35$ $3\,m + s = 35$ $m + 3\,s = 35$



**12.** Flor quiere festejar su cumpleaños llevando golosinas a la escuela. En el quiosco compra bocaditos de fruta, que cuestan $1,50 cada uno, y bocaditos de chocolate, que cuestan $2 cada uno. En total gasta $50.

a. Propongan 3 posibilidades de cantidades de bocaditos de fruta y de chocolate que puede haber comprado Flor con los $50.

b. Llamamos *f* a la cantidad de bocaditos de fruta y *c* a la cantidad de bocaditos de chocolate. Para cada respuesta, consideren el punto de coordenadas (*f* ; *c*). Ubiquen en este plano cartesiano los puntos correspondientes a las respuestas que dieron a la primera consigna de esta actividad.




c. Decidí cuáles pueden ser las ecuaciones que dan condiciones sobre las cantidad de bocaditos de cada tipo que puede haber comprado Flor.

$f + c = 50$ $1{,}5\,f + 2\,c = 0$ $1{,}5\,f + 2\,c = 50$

$f = \frac{100}{3} + \frac{4}{3}\,c$ $f = \frac{100}{3} - \frac{4}{3}\,c$ $c = 25 - 0{,}75\,f$

d. Completá el gráfico cartesiano de la segunda consigna, marcando todos los pares (*f* ; *c*) correspondientes a las compras posibles.

e. Para las ecuaciones que elegiste en la tercera consigna, encontrá, si es posible, alguna solución de la ecuación que no sea solución del problema. Si no es posible, justificá por qué no lo es.

**13.** En el borde de un rectángulo de cartulina se pegó una cinta de 60 cm.

a. En parejas, inventen tres posibilidades para el largo y el ancho del rectángulo.

b. Si llamamos $a$ y $b$ a las longitudes de los lados de la cartulina, escriban una ecuación que exprese la condición que deben cumplir estas medidas.

c. Usen la ecuación para verificar su respuesta a la primera consigna. Luego, úsenla para dar otros 5 pares de medidas que puede tener el rectángulo.

d. ¿Cuántos pares de medidas de largo y ancho hay?

En las actividades 11, 12 y 13 estudiaron situaciones en las cuales había dos variables ligadas por una condición. Si llamamos $x$ e $y$ a las variables, la condición pudo expresarse como una ecuación de la forma: $a \cdot x + b \cdot y = c$, en la que $a$, $b$ y $c$ son números cualesquiera (no todos iguales a cero). Este tipo de ecuación se llama **ecuación lineal con dos variables**. Por ejemplo, la ecuación $1{,}5 \cdot f + 2 \cdot c = 50$ expresa la condición que deben cumplir la cantidad de bocaditos de fruta ($f$) y la cantidad de bocaditos de chocolate ($c$) de la actividad 12.
Las **soluciones de una ecuación lineal con dos variables** son pares de valores. Para la ecuación del ejemplo anterior, (4 ; 22), (12 ; 16) y (0 ; 25) son soluciones que corresponden a diferentes compras posibles de bocaditos. El par (6 ; 20,5) es solución de la ecuación, pero no del problema, ya que no se puede comprar medio bocadito.
Si se representan en el plano cartesiano, cada solución es un punto.

Cuando un problema se modeliza con una ecuación lineal con dos variables, no todas las soluciones de la ecuación son soluciones del problema.

**14.** Decidí si cada par de números es solución de la ecuación dada.

| Ecuación | $2a - 5b = 2$ | | | $-a + 5b = 25$ | | $3{,}5a + 4b = 0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punto $(a ; b)$ | (11 ; 4) | (−11 ; −4) | $(0 ; -\frac{2}{5})$ | (−25 ; 0) | $(-1 ; \frac{48}{10})$ | (4 ; −3,5) | (0 ; 0) |
| ¿Es solución? | | | | | | | |

**15.** Resolvé las consignas para cada una de las ecuaciones con dos variables.

I. $2x + y = 15$ II. $5x - 4y = 40$

a. Encontrá tres pares de números que sean solución, ubicando el valor de la variable $x$ en la primera coordenada y el valor de $y$ en la segunda.

b. En la vista gráfica de un archivo GeoGebra ubicá los puntos que corresponden a los seis pares que escribiste en la consigna anterior. Marcá con colores diferentes los puntos que corresponden a cada ecuación.

c. Para cada ecuación, definí una función lineal que relacione lo que debe valer $y$ para cada valor de $x$.

d. Hacé en GeoGebra el gráfico de las funciones y verificá que cada gráfico pase por los puntos que marcaste antes.




## Ecuación de la recta

**16.** a. Realizá, en la carpeta o usando GeoGebra, un gráfico cartesiano que muestre todas las soluciones de la ecuación que escribieron en la actividad 13.

b. ¿Cuáles representan posibles pares del ancho y el largo de la cartulina?

**17.** a. Usá GeoGebra para graficar todas las soluciones de la ecuación $6\,s - \frac{1}{2}\,t = 12$.

b. Da las coordenadas de un punto de la recta que esté en el primer cuadrante.

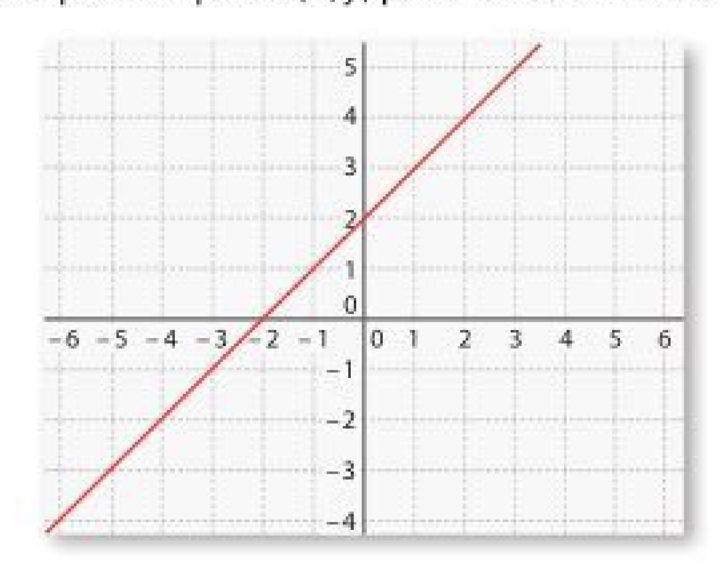
c. Da las coordenadas de un punto de la recta que esté por debajo del eje $x$.

Dada una ecuación lineal con dos variables, pueden definirse dos funciones lineales, tomando como variable independiente una de las dos variables. La representación gráfica de las soluciones, entonces, es una **recta**, pues coincide con el gráfico de una función lineal.
En la actividad 12 trabajaron con la ecuación $1{,}5\,f + 2\,c = 50$ y marcaron puntos que corresponden al gráfico de la función lineal $\mathrm{F}(x) = -0{,}75\,x + 25$, en la que $x$ representa la cantidad de bocaditos de fruta, y $\mathrm{F}(x)$, la cantidad de bocaditos de chocolate. También podrían haber trabajado con la función $\mathrm{G}(x) = -\frac{4}{3}\,x + \frac{100}{3}$, en la que $x$ representa la cantidad de bocaditos de chocolate y $\mathrm{G}(x)$, la cantidad de bocaditos de fruta.

Cuando un problema se modeliza con una ecuación lineal con dos variables, el gráfico de las soluciones del problema puede ser un segmento, toda una recta o algunos de sus puntos (finitos o infinitos).



**18.** a. Usá el gráfico de la recta para completar la tabla con las coordenadas que faltan para que cada punto $(x\,;\,y)$ pertenezca a la recta.




| $x$ | −1 | 0 | 1 | 1,5 | | 2,1 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | 2 | | | 4 | | |

b. Indicá cuáles de las siguientes ecuaciones caracterizan la recta.

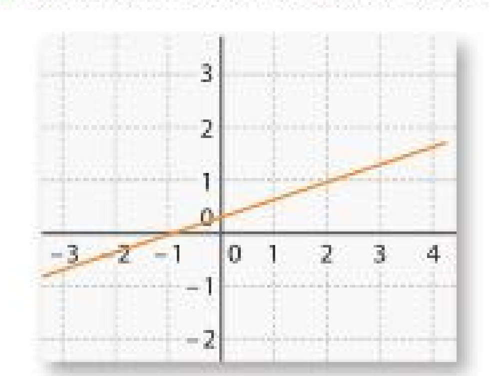
$y = 2\,x$ $\quad$ $y = x + 2$ $\quad$ $y = x + 1$

$y - x = 2$ $\quad$ $y = -2\,x$ $\quad$ $3\,y - 3\,x = 6$

Dada una recta, se dice que una ecuación lineal con dos variables es la **ecuación de la recta** cuando la representación gráfica de las soluciones es esa recta.



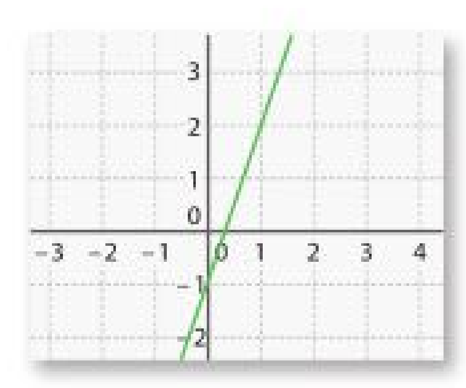

**19.** a. Uní con flechas cada recta con su ecuación.



$y - 3x = -1$

$y - 3x = 1$

$x - 3y = -1$



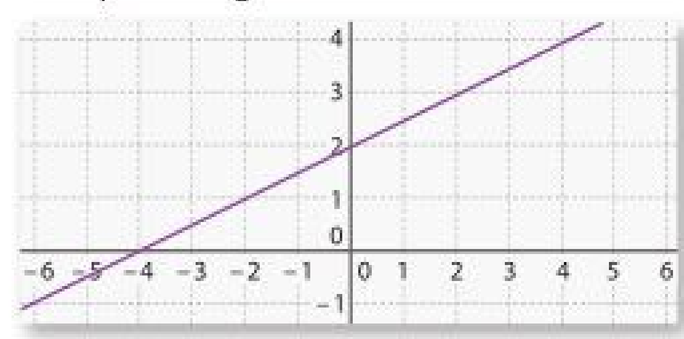
b. En uno de los dos sistemas de ejes anteriores, graficá la recta que representa a la ecuación que no elegiste en la consigna anterior.

**20.** a. ¿Es cierto que el punto A = (10 ; –1) pertenece a la recta cuya ecuación es $2x + 10y = 0$?

b. ¿Es cierto que el punto B = (0 ; 4) está por encima de la recta cuya ecuación es $y = 2x + 3$? ¿Y el punto C = (4 ; 10)?

c. ¿Es cierto que el punto D = (–1 ; 2) está por debajo de la recta cuya ecuación es $y = -10x - 7$? ¿Y el punto E = (2 ; –30)?

**21.** a. Escribí una ecuación para la siguiente recta.



b. Amparo describió la recta mediante la ecuación $y = 0{,}5 \cdot (x + 4)$. ¿Es correcto?

c. En cada ecuación falta escribir un número; completalas para que todas sean ecuaciones de la recta de la primera consigna.

$-\frac{1}{2}x + y =$ ........  $x - 2y =$ ........  $1{,}5 \cdot (x + 4) +$ ........ $y = 0$

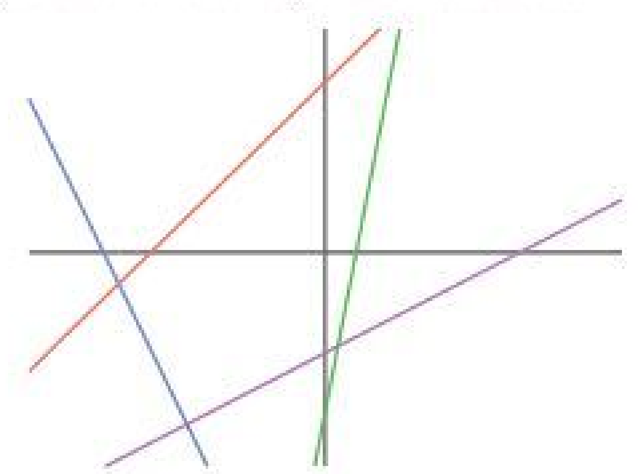
Una ecuación lineal con dos variables se puede trasformar sin modificar sus soluciones. Para hacerlo, se pueden realizar las mismas operaciones que se aplicaban en una ecuación lineal con una variable.

- Si se suma una expresión con variables o un número a ambos lados de la ecuación, no se modifica el conjunto solución.
- Si se multiplica por un número distinto de cero a ambos lados de la ecuación, no se modifica el conjunto solución.

Por ejemplo, si sumamos $\frac{1}{2}x$ a ambos lados de $-\frac{1}{2}x + y = 2$, obtenemos $y = \frac{1}{2}x + 2$, que tiene las mismas soluciones.
Cuando dos ecuaciones con dos variables tienen el mismo conjunto solución, se dice que son **equivalentes**.

## Pendiente de una recta

**22.** Se sabe que las pendientes de las rectas trazadas son 1, $\frac{1}{2}$, –2 y 5. En parejas, determinen qué pendiente le corresponde a cada recta.



Recta roja: ..................... Recta azul: .....................

Recta verde: ..................... Recta violeta: .....................

La **pendiente de una recta** es la pendiente de la función lineal que la tiene como gráfico. Por lo tanto, la pendiente de la recta es la variación que se produce en la coordenada *y* cuando la coordenada *x* crece una unidad.

**23.** En cada caso, encontrá la pendiente de la recta que tiene la ecuación dada.

a. $y - 2x = 4$ b. $y = -5 \cdot (x - 1)$

c. $x = 2y + 4$ d. $y = 2$

e. $5x - 10y = 0$ f. $x = 2 \cdot (y - 1)$

**24.** a. Se quiere hallar la pendiente de la recta que pasa por A = (4 ; 0) y B = (10 ; 12). Decidí si las siguientes estrategias son correctas.

Sofía
Como la recta pasa por el (4 ; 0), su fórmula es $y = m \cdot (x - 4)$, en la que m es la pendiente que quiero averiguar. Además, la recta pasa por el punto (10 ; 12), por eso la pendiente tiene que ser un número que, multiplicado por 10 – 4, dé 12. Es decir, 2.

Lola
Hago 4 – 0 = 4, que es la resta entre la abscisa y la ordenada del primer punto, y dividido por 12 – 10, que es la resta entre la ordenada y la abscisa del segundo punto. Después hago 4 : 2 = 2, y listo.

Valentín
Yo sé que la pendiente es la variación que se produce en la variable y por cada aumento de una unidad en la variable x. En este caso, si aumento la variable x en 6 (que viene de hacer 10 – 4), la variable y aumenta en 12 (que es el resultado de 12 – 0). Por lo tanto, la pendiente es 12 : 6 = 2.

.....................................................................

.....................................................................

b. En tu carpeta, escribí otra estrategia para encontrar la pendiente de la recta.

**25.** Completá, si es posible, cada ecuación lineal con dos variables para que sea la ecuación de una recta con pendiente 5. Si no es posible, explicá por qué.

a. ..........$x + 3y = 12$ b. $15x +$ ..........$y = 12$ c. $15x - 2y =$ ..........

d. $x =$ ..........$y - 3$ e. $y =$ ..........$x + \frac{1}{3}$ f. $x = \frac{1}{5}y +$ ..........

**26.** Para cada caso, encontrá, si es posible, una ecuación para una recta que cumpla lo pedido.

a. Pasa por los puntos A = (1 ; 2) y B = (3 ; 5). ........................

b. Pasa por el punto C = (3 ; 4). ........................

c. Pasa por los puntos A, B y C. ........................

d. Pasa por los puntos A, B y D = (–3 ; –4). ........................

**27.** a. Decidí si existe una recta que pase por A = (–2 ; 6), B = (3 ; 16) y C = (9 ; 26). Escribí tu decisión en la carpeta.

b. Para responder la consigna anterior, Julieta escribió lo siguiente. ¿Estás de acuerdo con ella? ¿Por qué?

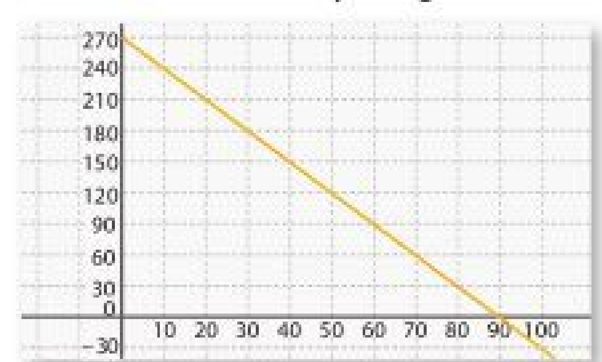
Si existiera una recta que pasara por los puntos A, B y C, los números: $\frac{16-6}{3-(-2)}$ y $\frac{26-16}{9-3}$ deberían ser iguales. Como no lo son, no existe tal recta.

**28.** Decidí, en cada caso, si las rectas son paralelas. Justificá tus decisiones.

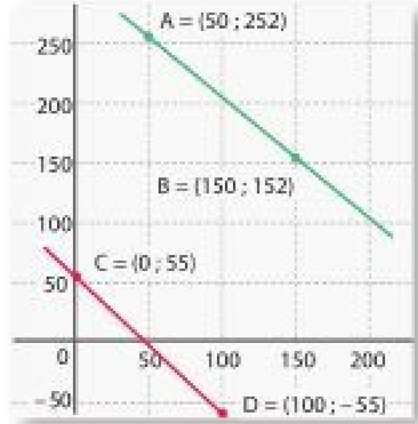
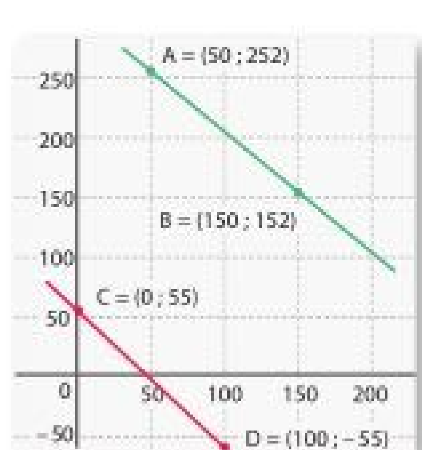
Recordá que dos rectas son **parelelas**, es decir que no se cortan, si tienen la misma pendiente.

a. La recta de ecuación $y = 4x$ y la recta que pasa por los puntos (0 ; 2) y (1 ; 5).

b. El gráfico de la función $F(x) = -3x + 1$ y la siguiente recta.




c. Las siguientes rectas.


**29.** Escribí, si es posible, una ecuación de una recta que cumpla lo pedido.

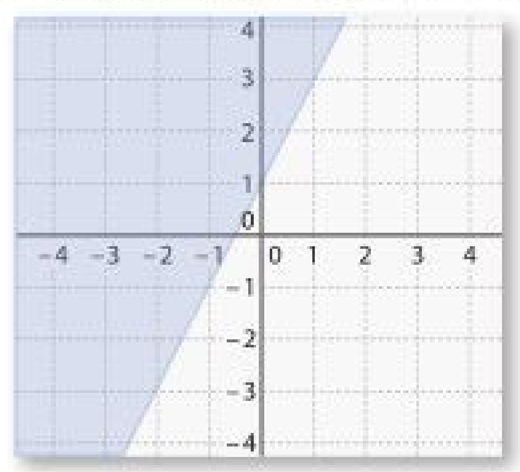
a. Tiene pendiente 2 y pasa por el punto E = (–1 ; 1,5).

b. Corta al eje $x$ en 4 y al eje $y$ en 2.

c. Es paralela a la recta de ecuación $x + y = 2$.

## Inecuaciones con dos variables

**30.** La siguiente imagen muestra la pantalla de un radar en la que se puede distinguir una región azul que es parte de un semiplano.



a. En parejas, encuentren las coordenadas de dos puntos que pertenezcan al semiplano y dos puntos que no pertenezcan a él.

b. ¿Pertenece el punto (1 ; 1) al semiplano? ¿Y el (1 ; 3)? ¿Y el (1 ; 4)?

c. Describan el semiplano usando ecuaciones y/o inecuaciones.

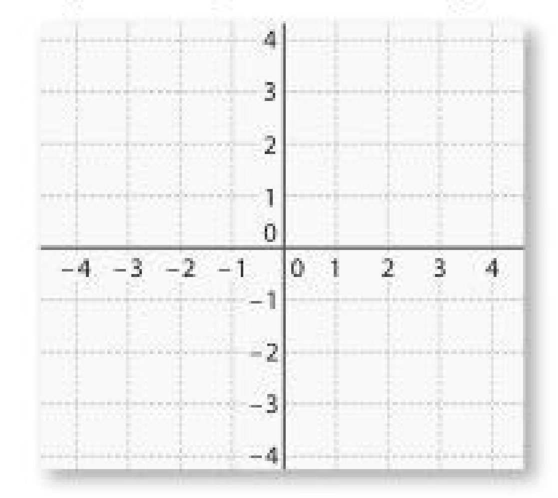


**31.** Bautista usó la inecuación $y \geq x - 1$ para describir un semiplano.

a. Escribí dos puntos que pertenezcan a la región y dos puntos que no.

b. El punto (4 ; 7), ¿pertenece al semiplano? ¿Y el (1 ; 2)?

c. Marcá cuatro puntos que verifiquen la ecuación $y = x - 1$.



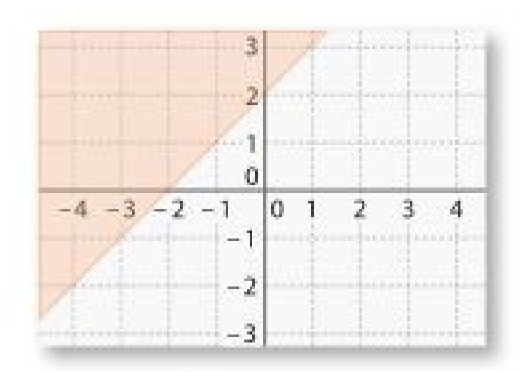
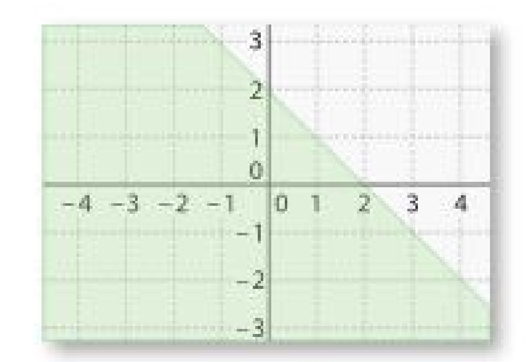
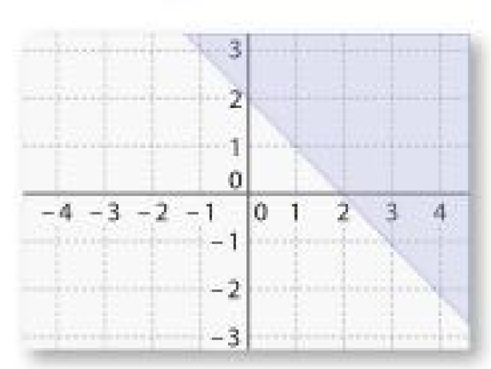
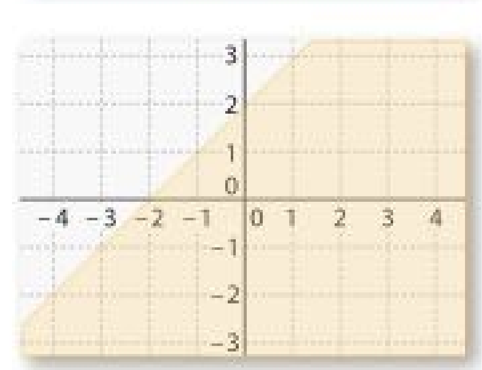
d. En el sistema de ejes cartesianos anterior, marcá 4 puntos del semiplano descripto por Bautista.

e. Justificá esta afirmación: "Si las coordenadas de un punto P verifican la inecuación $y \geq x - 1$, entonces las coordenadas de cualquier punto Q que se encuentre en la misma vertical y por arriba de P también la verifican."

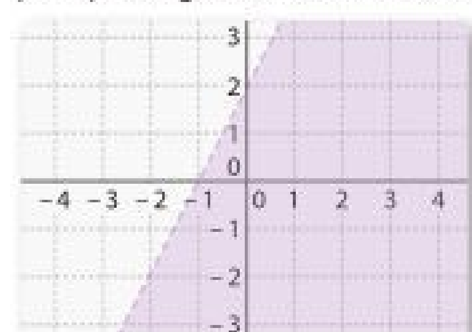
f. Para graficar el semiplano, Ana hizo lo siguiente. ¿Estás de acuerdo con ella?

> Primero grafiqué la recta $y = x - 1$, que es el borde. Después, como sabía que era un semiplano, busqué en la inecuación un punto que esté en la región, en este caso el (1 ; 1), y marqué toda esa parte.

**32.** En parejas, decidan cuál de estos gráficos corresponde a la inecuación $x + y \geq 2$.

**33.** En parejas, decidan cuáles de las inecuaciones describen el semiplano. Expliquen por qué eligieron o descartaron cada una.



$x < 2y + 2$ $y < 2x + 2$ $x - 2 \leq 2y$

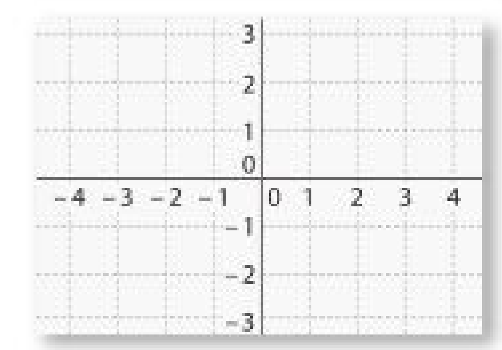
$x \leq 2 \cdot (y + 1)$ $y < 2 \cdot (x + 1)$ $-2x + y < 2$

..............................................................................

..............................................................................

Para distinguir las condiciones $x \geq 2$ y $x > 2$, al representar la región que corresponde a la segunda condición, se hace una línea punteada en el borde, que son los puntos con $x = 2$ que no están incluidos. La línea de puntos indica que esos puntos no pertenecen al gráfico.

**34.** Graficá el semiplano que se describe con la inecuación $x < \frac{1}{2}y + 2$.



**35.** Escribí la inecuación que describe el siguiente semiplano.



..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

## Sistema de ecuaciones lineales

**36.** Para describir la ubicación de un objeto en una imagen de radar, Juan propuso el siguiente sistema de ecuaciones. $\begin{cases} y - x = 2 \\ y = -2 \cdot (x + 1) \end{cases}$

a. ¿Es posible que el objeto se encuentre en el punto A = (3 ; 5)? ¿Y en el (1 ; –4)?

b. Para encontrar la posición del objeto, Analía le dijo a Juan que le convenía graficar las rectas correspondientes a cada ecuación del sistema y buscar el punto que estuviera en las dos rectas. ¿Estás de acuerdo con Analía? ¿Por qué?

c. Encontrá la ubicación del objeto en el plano cartesiano. Podés hacerlo en tu carpeta o usando GeoGebra.

El **conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales** es el conjunto de pares ordenados que son, simultáneamente, solución de las dos ecuaciones. Resolver un sistema es encontrar el conjunto solución. Como cada ecuación se puede representar con una recta, la solución del sistema corresponde a la intersección de las rectas.

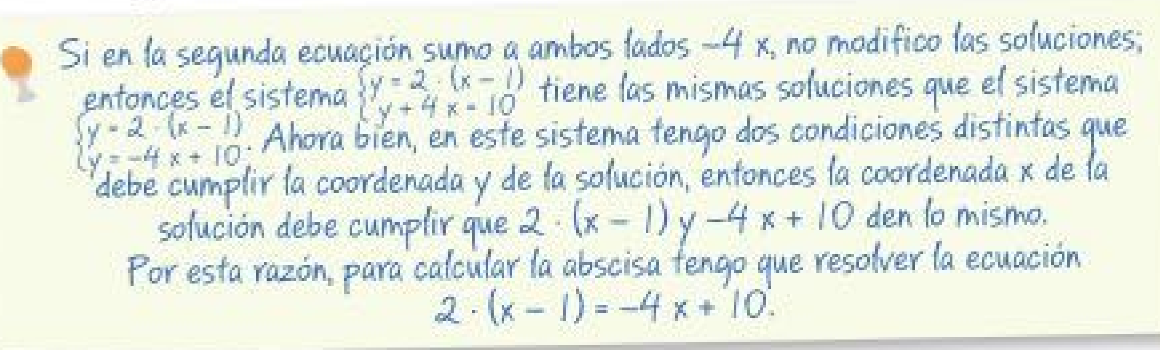


**37.** Encontrá gráficamente el conjunto solución de cada sistema de ecuaciones.

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = x - 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = 2 \cdot (x - 1) \\ y + 4x = 10 \end{cases}$

**38.** Para resolver el segundo sistema de ecuaciones de la actividad anterior, Pedro escribió lo siguiente.




a. ¿Es correcto el razonamiento de Pedro?

b. Resolvé la ecuación que propuso Pedro para hallar el valor de *x*.

c. ¿Cómo se puede hacer para encontrar la coordenada *y* del punto solución?

d. Compará la solución del sistema que obtuviste con este procedimiento con la que hallaste gráficamente en la actividad 37.

**39.** Ámbar fue a la librería y compró 8 cuadernos y 4 bolígrafos. Gastó $232 en total. Teo fue a la misma librería y compró 6 cuadernos y 6 bolígrafos iguales a los que compró Ambar. Gastó $198 en total.

a. Si llamamos *c* al precio de los cuadernos y *b* al precio de los bolígrafos, decidí cuál es el sistema de ecuaciones que expresa las condiciones que deben cumplir los precios de acuerdo con la información del enunciado.

$\begin{cases} 8c + 4b = 6c + 6b \\ 6c + 6b = 198 \end{cases}$ $\begin{cases} 8c + 4b = 232 \\ 6c + 6b = 198 \end{cases}$

b. Para el sistema que hayas elegido, transformá cada ecuación sin modificar el conjunto solución y completá la escritura del sistema.

$\begin{cases} 2b = \dots\dots\dots \\ 2b = \dots\dots\dots \end{cases}$

c. Usá la estrategia de la actividad 38 para encontrar las soluciones del sistema.

d. Verificá que las soluciones encontradas sean soluciones de las dos ecuaciones del sistema elegido en la primera consigna y del que obtuviste en la segunda.

Para hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se puede proceder del siguiente modo.

1. Se transforma cada ecuación para que en ambas aparezca la misma expresión sumando y que contenga a alguna de las dos variables. Por ejemplo, para resolver el siguiente sistema, se pueden multiplicar ambos lados de la segunda ecuación por 8 y obtener el sistema de la derecha, que tiene las mismas soluciones que el sistema original.

$$\begin{cases} 2x - 10y = \frac{7}{2} \\ \frac{1}{4}x + y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 10y = \frac{7}{2} \\ 2x + 8y = 8 \end{cases}$$

2. Se transforma cada ecuación despejando la expresión que se repite en ambas. En el ejemplo, esto se logra al sumar 10 $y$ a ambos lados en la primera ecuación y sumar –8 $y$ a ambos lados en la segunda, y se obtiene un sistema con las mismas soluciones que el original.

$$\begin{cases} 2x - 10y = \frac{7}{2} \\ 2x + 8y = 8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{7}{2} + 10y \\ 2x = 8 - 8y \end{cases}$$

3. Lo que quedó igualado a la misma expresión se puede igualar para hallar el valor de una de las dos variables. En el ejemplo resulta $\frac{7}{2} + 10y = 8 - 8y$, cuya solución es $y = \frac{1}{4}$.
4. Se reemplaza esa variable por el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones originales (o en alguna de los sistemas que se fueron obteniendo) para hallar el valor de la otra variable. En el ejemplo se puede reemplazar la $y$ por $\frac{1}{4}$ en $2x = 8 - 8y$, para obtener $2x = 8 - 8 \cdot \frac{1}{4}$. La solución de la ecuación es $x = 3$, $y = \frac{1}{4}$.

Si se reemplazan ambas variables en cada ecuación del sistema original (o en cualquiera de los sistemas que se fueron obteniendo) por los valores hallados, se deben verificar las igualdades. Si esto no sucede, significa que hubo un error en algún paso.

Cuando dos sistemas tienen las mismas soluciones, se llaman **sistemas equivalentes**.

**40.** Resolvé los siguientes sistemas de ecuaciones con el procedimiento que se explicó en la página anterior. Luego resolvelos gráficamente con GeoGebra y verificá que las soluciones que hallaste sean correctas.

a. $\begin{cases} 3x + 7y = 0 \\ x + 7y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{5}{3}x - y = 10 \\ 1{,}5x - y = 7 \end{cases}$

**41.** La antigua cancha de fútbol de un club tenía 290 metros de perímetro. El año pasado decidieron agrandarla, aumentando el largo en 10,5 metros y el ancho en 4,5 metros. En la actualidad, la cancha tiene 320 metros de perímetro.

a. En parejas, planteen un sistema de ecuaciones que exprese las dos condiciones del enunciado sobre las dimensiones de la cancha.

b. Resuelvan el sistema y escriban las nuevas dimensiones de la cancha.

**42.** a. Resolvé el siguiente sistema. $\begin{cases} 4a + 7b = 8 \\ 7b = -4a + 1 \end{cases}$

b. Para resolver el sistema anterior, Milton pensó lo siguiente: "De la primera ecuación, como $4a + 7b = 8$, deduzco que $7b$ tiene que ser igual a $8 - 4a$. Como la segunda ecuación dice que $7b$ es igual a $-4a + 1$, $a$ deberá cumplir $-4a + 1 = -4a + 8$, y eso es imposible ya que no hay ningún número $a$ que verifique eso." ¿Tiene razón Milton? ¿Por qué?



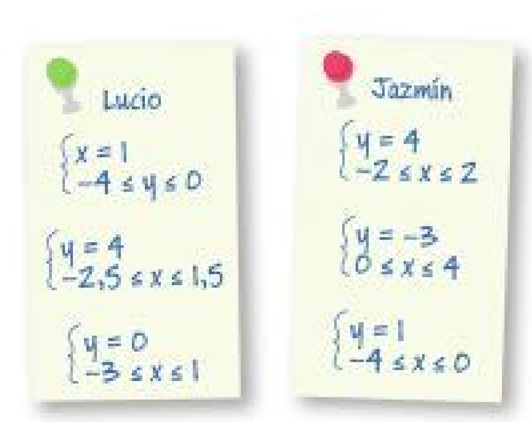
En las actividades 41 y 42 trabajaron con sistemas cuya solución no era un par ordenado, como pasaba en las actividades anteriores. Lean y estudien estos ejemplos.

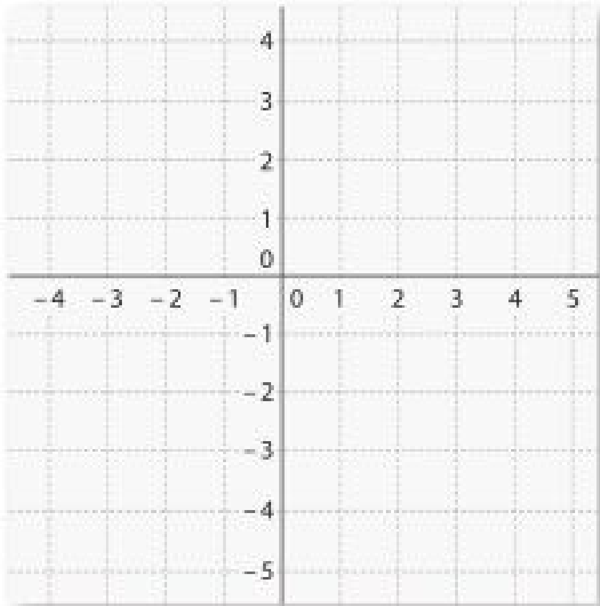
1. Se quiere resolver el siguiente sistema. $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 6y = -8x + 8 \end{cases}$
   Se puede transformar la primera ecuación sumando $-4x$ a ambos lados y luego multiplicando por 2 a ambos lados. Al hacer eso, se obtiene un sistema equivalente, pero la primera ecuación queda transformada en la segunda ecuación. Esto significa que las dos ecuaciones originales tienen la misma solucion y que el sistema tiene la misma solución que estas. Por lo tanto, el sistema tiene **infinitas soluciones** y su representación gráfica es una sola recta, ya que las rectas de las ecuaciones coinciden. Esto sucedió en la actividad 41.
2. Si se quiere resolver el siguiente sistema, se puede transformar la primera ecuación multiplicando por 3 a ambos lados y en la segunda sumar $-15y$ a ambos lados, obteniendo un sistema equivalente, en el cual se ve que no hay valores de las variables que puedan ser solución de ambas ecuaciones simultáneamente.

$$\begin{cases} x - 5y = \frac{4}{3} \\ 3x = 15y + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x - 15y = 4 \\ 3x - 15y = 1 \end{cases}$$

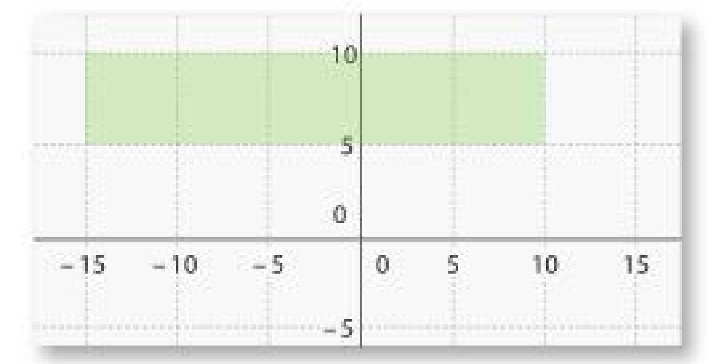
Las rectas que representan las dos ecuaciones son paralelas y, por lo tanto, no tienen puntos en común. Es decir que el sistema **no tiene solución**. Es lo que sucedió en la actividad 42.

**1.** Lucio y Jazmín jugaron una partida de la batalla naval con segmentos. Estos fueron los tres disparos que hizo cada uno. Ubicá en el siguiente tablero dónde podría haber estado el barco de cada uno, sabiendo que Jazmín ganó el juego.



**2.** El radar indica la presencia de un objeto. Escribí condiciones sobre las coordenadas que caractericen a todos los puntos donde está ubicado el objeto.





**3.** Resolvé las siguientes consignas para la ecuación con dos variables $3x - y = 4$.

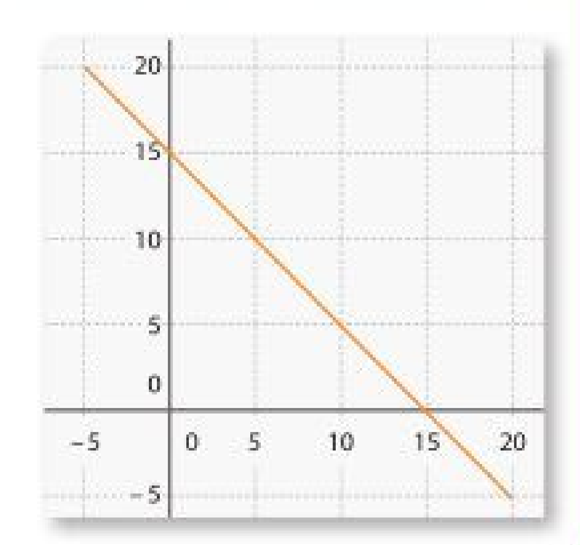
a. Encontrá tres pares de números $(x\,;y)$ que sean soluciones de la ecuación.

b. Ubicá en la vista gráfica de GeoGebra los puntos que corresponden a los pares que escribiste.

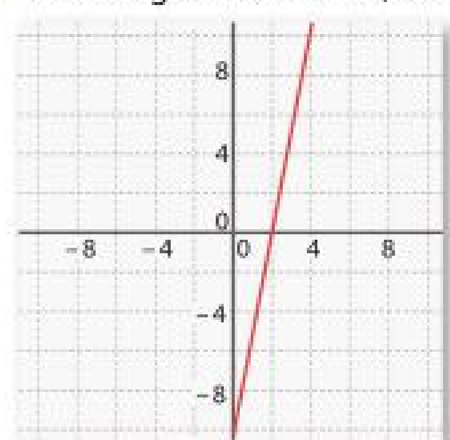
c. Definí una función lineal F que relacione lo que debe valer $y$ para cada valor de $x$. Verificá que su gráfico pase por los puntos marcados en la segunda consigna.

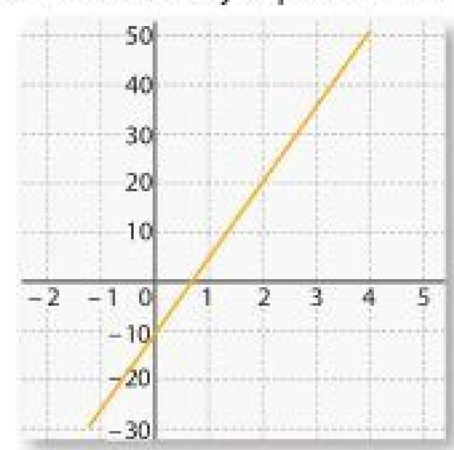
**4.** a. Encontrá una ecuación lineal de esta recta.

b. Mara dijo: "Como la recta pasa por el (0 ; 15) y el (15 ; 0), la ecuación $x + y = 15$ la describe". ¿Estás de acuerdo con ella?



**5.** De las siguientes rectas, decidí cuál es la de mayor pendiente. Explicá tu decisión.




**6.** Decidí si estas afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones en la carpeta.

a. Una recta que tiene pendiente $a$ es paralela a otra de ecuación $a \cdot x + 2y = 0$.

b. Una recta de ecuación $y = a \cdot (x - 10)$ y una recta de ecuación $y = a \cdot x + 6$ son paralelas.

**7.** Graficá el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a. $y \leq \frac{1}{2}x + 2$

b. $2x + y \geq 1$

**8.** Resolvé las consignas para el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} y \geq 2x \\ y \geq 3 \end{cases}$.

a. Escribí dos puntos que pertenezcan a la región y dos puntos que no.

b. El punto (1 ; 2), ¿pertenece a la región?

c. Graficá la región descripta por el sistema de inecuaciones.

**9.** José y Bruno llenaron un abrevadero de 60 litros. José usó un bidón de 6 litros y Bruno una botella de 1,5 litros. Entre los dos hicieron 22 viajes de la canilla al abrevadero. Siempre llenaron su recipiente hasta el límite y lo vaciaron completamente.

a. Considerá que $j$ es la cantidad de viajes que hizo José y $b$ es la cantidad de viajes que hizo Bruno. Indicá cuáles de estos sistemas, al resolverlo, permite saber cuántos viajes realizó cada uno. Explicá por qué descartaste o elegiste cada uno.

$\begin{cases} j + b = 22 \\ 6j = 1{,}5\,b \end{cases}$ $\begin{cases} j + b = 22 \\ 6j + 1{,}5\,b = 60 \end{cases}$ $\begin{cases} j + b = 60 \\ 6j + 1{,}5\,b = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} j + b = 22 \\ 4j + b = 40 \end{cases}$

b. Calculá cúantos viajes realizó cada uno.

**10.** Proponé, en cada caso, un sistema de ecuaciones lineales que cumpla lo pedido.

a. Su única solución es (2 ; 5).

b. Tiene más de una solución.

c. No tiene solución.

**11.** Resolvé los siguientes sistemas gráficamente usando GeoGebra. Luego, encontrá la solución transformando las ecuaciones y compará con la resolución gráfica.

a. $\begin{cases} 9x + 3y = 10 \\ 8x - 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ 4x - 12y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$

**12.** Un montacargas completo puede llevar 20 cajones de la mercadería A y 5 de la mercadería B. Si se sacan 3 cajones de la mercadería A, entonces puede ponerse uno más de la B. ¿Cuál es el peso de cada cajón de A y de cada cajón de B si el total que permite llevar el montacargas es 4.900 kg?

Capítulo 10

Geometría: coseno, seno y tangente de ángulos agudos; algunos valores sin calculadora; propiedades; relación entre la pendiente de una recta y la tangente del ángulo agudo que forma con el eje de las abscisas.

# Razones trigonométricas

1. Simón tiene 3 años y le da miedo deslizarse por los toboganes. Julia, su mamá, quiere comprarle uno para ayudarlo a perder ese miedo. En una juguetería le dieron este folleto. Resuelvan las consignas en parejas.

MODELO 1




¡Llegaron nuevos toboganes!

Modelo 1: 1 m de altura y 2,5 m de largo.
Modelo 2: 0,5 m de altura y 1,5 m de largo.
Modelo 3: 0,5 cm de altura y 1 m de largo.

a. ¿Cuál elegirían para Simón? ¿Por qué?

..................................................................................................

b. ¿En cuál piensan que Simón tendrá más miedo? ¿Por qué?

..................................................................................................




## Ángulo de inclinación

**2.** Teniendo en cuenta el folleto de la actividad 1, decidí con un compañero cuáles de estas afirmaciones son correctas. Expliquen sus respuestas en la carpeta.

a. El tobogán modelo 3 es más empinado que el modelo 2, porque tiene la misma altura y su rampa es más corta.

b. El tobogán modelo 1 es más empinado que el modelo 3, porque es más alto y su rampa es más larga.

c. El ángulo que forma la altura con la rampa del tobogán modelo 2 tiene mayor amplitud que el ángulo que forma la altura con el tobogán modelo 3, porque ambos tienen la misma altura, pero la rampa del modelo 2 es más larga.

**3.** Julia compró el tobogán modelo 3, pero a Simón le resultó muy chiquito. Cuando volvió al negocio, pidió otro tobogán que fuera igual de empinado. El vendedor le dijo que tenía dos modelos así y le mostró un folleto. En parejas, completen los datos que faltan.

| Número de modelo | Altura (en metros) | Largo de la rampa (en metros) |
|---|---|---|
| 4 | 0,75 | |
| 5 | | 2,20 |



**4.** También tienen el modelo 6, con una altura de 1,75 m y 5,25 m de largo. Decidí si tiene la misma inclinación que alguno de los modelos de la primera actividad. Justificá tu decisión en la carpeta.

**5.** Para comparar la inclinación de dos toboganes, Mauro calculó cuánto descendía de altura cada tobogán en un recorrido de 1 m sobre la rampa. Explicá cómo se pueden usar esos números para comparar las inclinaciones.

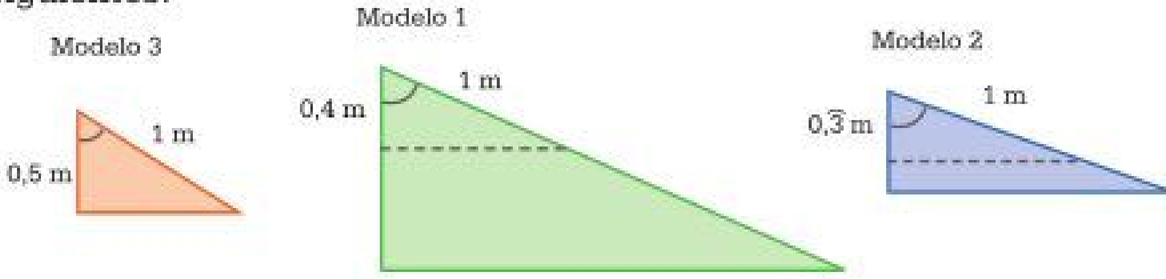
**6.** a. Completá la tabla considerando todos los modelos.

| Número de modelo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Altura del tobogán (en m) | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,75 | | 1,75 |
| Largo de la rampa del tobogán (en m) | 2,5 | 1,5 | 1 | | 2,20 | 5,25 |
| Altura que se desciende por metro recorrido sobre la rampa (en m) | | | | | | |

b. Teniendo en cuenta la última fila de la tabla, ordená los toboganes del más empinado al menos empinado.

.................................................................

En las dos actividades anteriores compararon la inclinación de los toboganes calculando cuánto se descendía en cada uno por cada metro recorrido sobre la rampa del tobogán. Para hallar este valor se puede calcular el cociente entre la medida de la altura del tobogán y la medida del largo de la rampa. Cuanto mayor sea ese número, más empinado es el tobogán, porque para igual distancia recorrida (1 metro), el descenso de altura es mayor. Ordenando los toboganes del más empinado al menos empinado, los esquemas serían los siguientes:




Llamaremos **ángulo de inclinación** del tobogán al ángulo formado entre la rampa del tobogán y la vertical.

**7.** Decidan en parejas si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen sus decisiones en la carpeta.

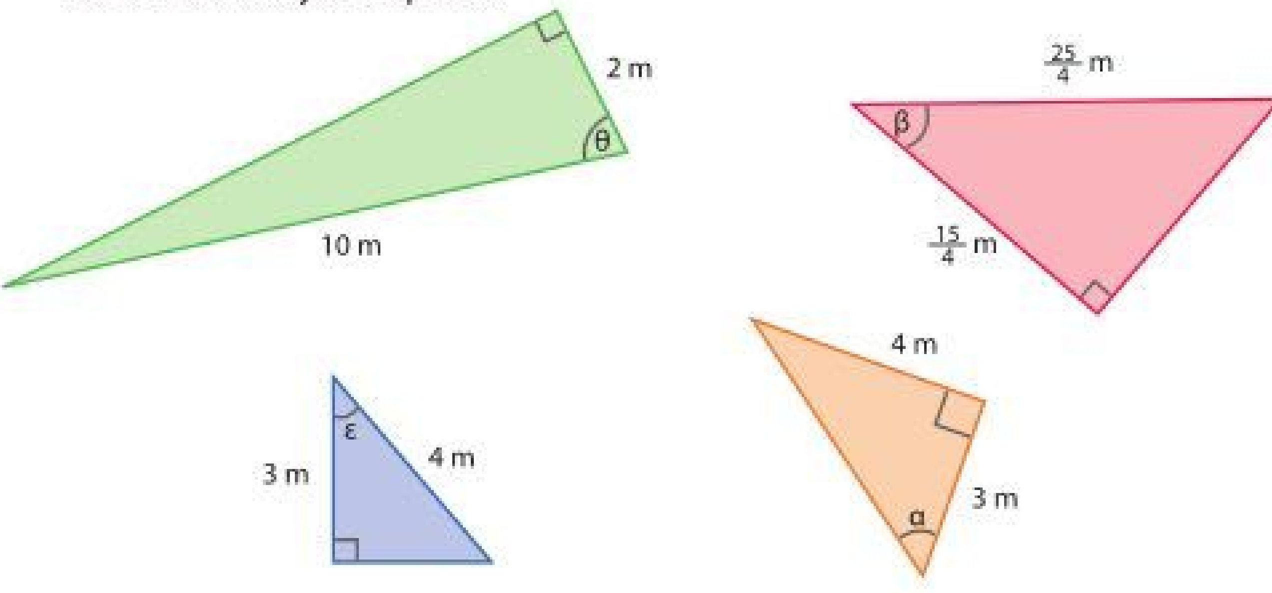
a. Un tobogán es más empinado que otro si el ángulo de inclinación es mayor.

b. Si en un tobogán se desciende más altura que en otro por metro recorrido sobre la rampa, su ángulo de inclinación también es mayor.

c. Si las rampas de dos toboganes tienen el mismo largo y el mismo ángulo de inclinación, entonces su altura también es la misma.

d. Si dos toboganes tienen la misma altura y sus rampas son del mismo largo, entonces su ángulo de inclinación es el mismo.

**8.** Teniendo en cuenta los datos de estos triángulos, ordená los ángulos $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$ y $\theta$ de menor a mayor amplitud.



## Coseno de un ángulo agudo

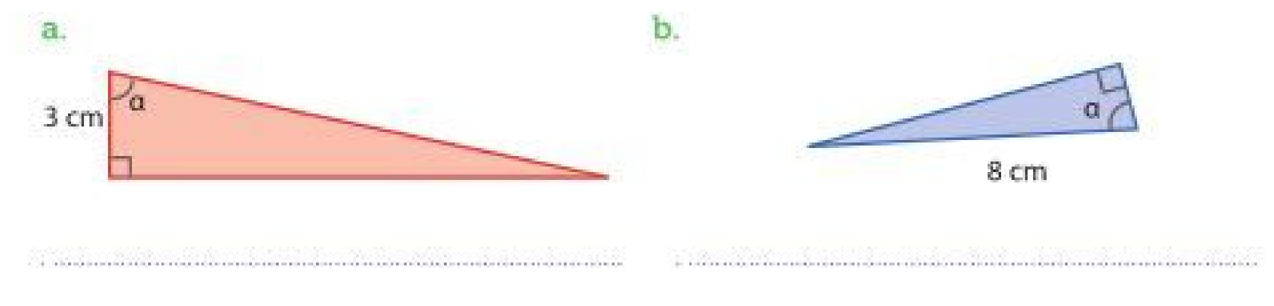
Dado un ángulo α de un triángulo rectángulo, se llama **coseno de α** al cociente entre la medida del cateto adyacente a α y la medida de la hipotenusa. La igualdad también se puede escribir como:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Esta razón es la misma para cualquier triángulo rectángulo que tenga un ángulo de la misma amplitud que α.
En la actividad 6 tuvieron que calcular la altura que se desciende por metro recorrido sobre la rampa para cada tobogán, ese valor coincide con el coseno del ángulo de inclinación.

Recuerden que en un triángulo rectángulo los **catetos** son los lados que determinan el ángulo recto y la **hipotenusa** es el lado opuesto al ángulo recto. Además, para cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se llama **cateto opuesto** al lado opuesto a ese ángulo y **cateto adyacente** al otro cateto.

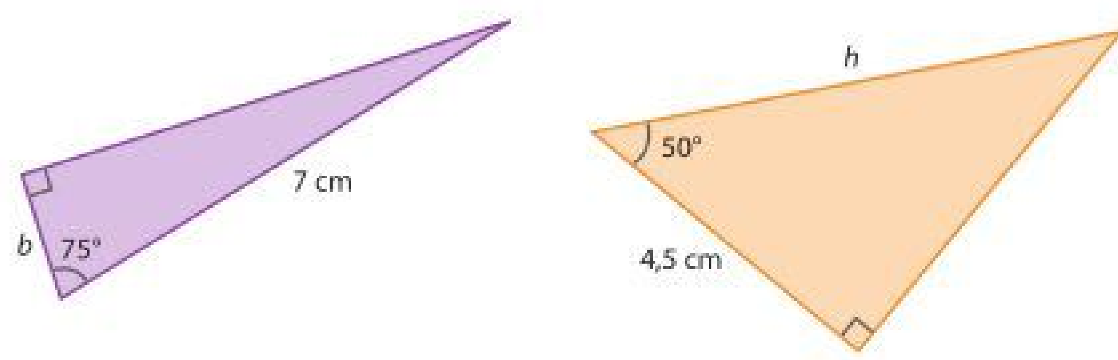
**9.** Para cada triángulo se sabe que cos α = 0,2. Calculá las medidas de los otros dos lados.



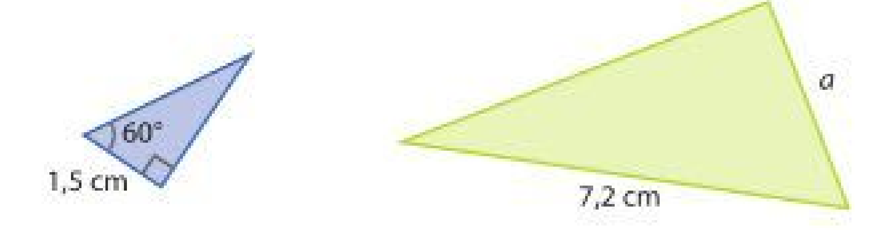

.......................................................... ..........................................................

.......................................................... ..........................................................

**10.** En tu carpeta, calculá la medida del lado *b* del triángulo violeta y la medida de la hipotenusa *h* del triángulo anaranjado.




**11.** Estos dos triángulos son semejantes. Calculá la medida del lado *a* y explicá cómo lo hiciste.




**12.** Verificá tu respuesta de la segunda consigna de la actividad 6 hallando con la calculadora una amplitud aproximada de cada ángulo de inclinación.

**13.** Calculá, aproximadamente, la amplitud de los ángulos α, β, ε y θ de la actividad 8, y verificá si tu respuesta fue correcta.

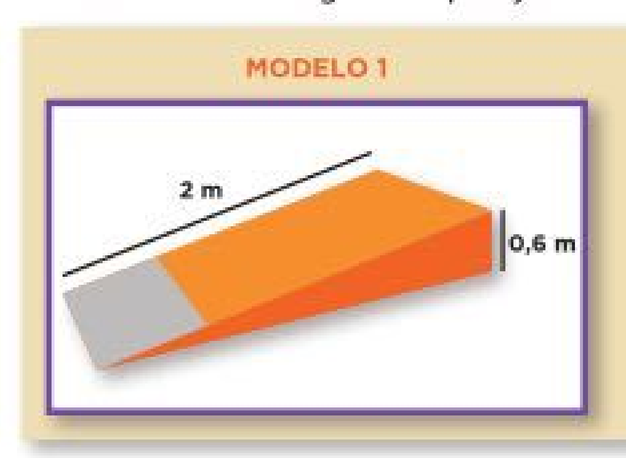
Para que la calculadora identifique que se ingresan ángulos en grados, hay que trabajar en modo *deg*. Esta es la abreviatura de *degrees*, que significa "grados" en inglés.
Para calcular el **coseno** de un ángulo, presionen COS, luego ingresen el valor de su amplitud y, finalmente, =.

Si conocen el coseno de un ángulo y quieren hallar la amplitud, presionen SHIFT, luego COS, ingresen la amplitud y aprieten =.

## Seno y tangente de un ángulo agudo

**14.** Ciro anda en patineta y quiere aprender a deslizarse por las rampas. El papá quiere regalarle una para principiantes y le dieron un folleto con estos modelos. Resuelvan las consignas en parejas.

MODELO 1




**Rampas disponibles:**

Modelo 1: 0,6 m de altura y 2 m de largo.
Modelo 2: 0,5 m de altura y 1 m de largo.
Modelo 3: 0,9 m de altura y 3 m de largo.
Modelo 4: 0,8 m de altura y 2,3 m de largo.

a. ¿Cuál le comprarían a Ciro? ¿Qué tuvieron en cuenta para elegirla?

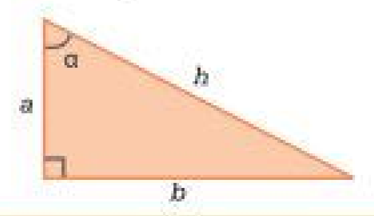
b. Con los datos del folleto, ¿es posible obtener la amplitud del ángulo entre la rampa elegida y el piso? Si es posible, hallen esa amplitud para cada rampa.

En las páginas anteriores identificaron que en un triángulo rectángulo la razón entre la medida de dos de sus lados es un valor útil para averiguar la medida de uno de sus ángulos o de sus lados. Además del coseno, hay otras razones: el seno y la tangente. Dado un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, el **seno** del ángulo es la razón entre el cateto opuesto a ese ángulo y la hipotenusa, y la **tangente** del ángulo es la razón entre el cateto opuesto a ese ángulo y el cateto adyacente a él. Estos cocientes son las **razones trigonométricas** y se escriben así:

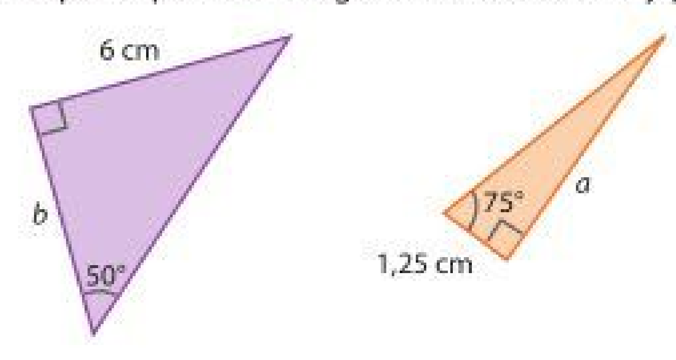
$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{b}{a}$$




**15.** Hallá la medida del lado $b$ del triángulo violeta y la medida del lado $a$ del anaranjado. Explicá qué razón trigonométrica usaste y por qué la elegiste.




Para hallar el seno de un ángulo hay que presionar SEN, luego ingresar el valor de su amplitud y, finalmente, =.




**16.** Para cada rampa de la actividad 14, hallá la amplitud del ángulo que forma la rampa y el piso utilizando el seno del ángulo. Verificá que las amplitudes sean las mismas que las obtenidas anteriormente.

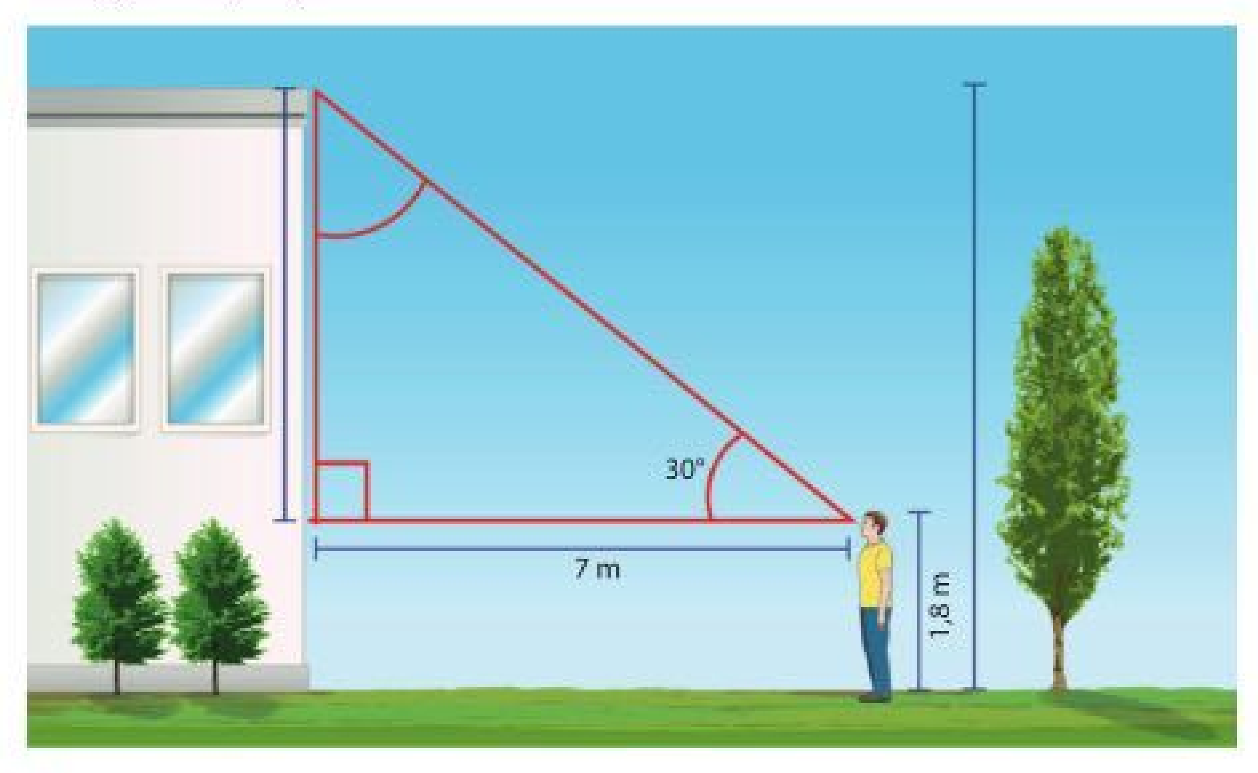
**17.** Julián apoyó una escalera de 3,5 metros de largo de tal manera que el pie de la misma quedó a 2 metros de la pared.

a. ¿Cuál es la amplitud del ángulo que forma la escalera con el piso?

b. Si una escalera se apoya en el piso muy alejada de la pared, es insegura y se puede caer. Los pintores dicen que, como máximo, se puede alejar 1 metro por cada 4 metros de altura. Siguiendo ese criterio, ¿dirías que la manera en que la apoyó Julián es segura? ¿Cuál es la amplitud mínima del ángulo entre la escalera y el piso que aconsejan los pintores?

Si conocen el seno de un ángulo y quieren hallar la amplitud, presionen SHIFT, luego SEN, ingresen la amplitud y aprieten =. Para hallar la amplitud de un ángulo conociendo la tangente se procede de manera similar usando la tecla TAN.

**18.** Miguel quería calcular, aproximadamente, la altura de esta casa. Resuelvan las consignas en parejas.




a. Se ubicó a 7 metros y miró hacia el techo con un ángulo aproximado de 30°. Si él mide 1,8 metros, ¿cómo puede estimar la altura de la casa? ¿Cuánto mide la casa según Miguel?

b. El arquitecto le dijo que la casa medía 6,8 metros. ¿Con qué ángulo, en realidad, miró Miguel?

**19.** Para cada caso, decidí con un compañero si existe un triángulo rectángulo que cumpla lo pedido. Justifiquen sus decisiones.

a. Tiene un ángulo δ que cumple $\text{sen}\ \delta = \frac{4}{5}$, el cateto opuesto a δ mide 16 cm y la hipotenusa mide 20 cm.

b. Tiene un ángulo θ que cumple $\cos\theta = \frac{7}{5}$.

c. Tiene un ángulo φ que cumple $\text{tg}\ \varphi = \frac{2}{3}$, el cateto opuesto a φ mide 3 cm y el cateto adyacente a φ mide 4,5 cm.

## Algunas razones trigonométricas sin calculadora

**20.** Resuelvan las consignas en parejas.

a. Argumenten por qué tg (45°) = 1.

b. Argumenten por qué cos (45°) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

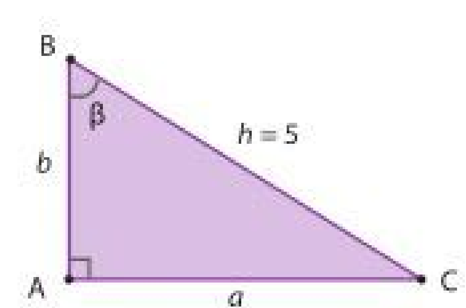
c. Hallen el valor de sen (45°) sin usar la calculadora.

> Para la primera consigna, pueden pensar en un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°. Para la segunda, pueden pensar en un triángulo rectángulo en el cual el cateto adyacente al ángulo de 45° mide 1 cm.

**21.** Argumentá por qué la igualdad $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$ se cumple para cualquier ángulo agudo α de un triángulo rectángulo.



**22.** En parejas, consideren todos los triángulos ABC cuya hipotenusa mida 5 cm. Resuelvan las consignas en la carpeta.




a. Hallen cos β para $b = 1$, $b = 0{,}5$ y $b = 0{,}1$.

b. Hallen cos β para $b = 4{,}5$, $b = 4{,}9$ y $b = 4{,}99$.

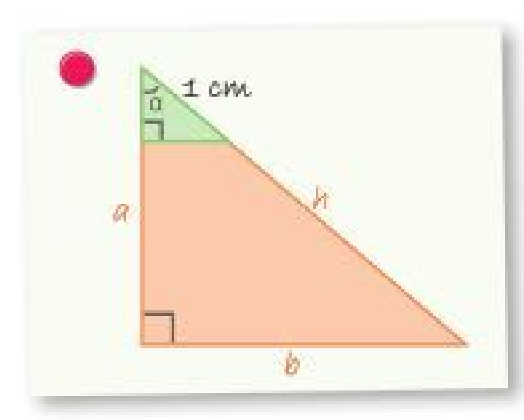
c. ¿Qué valores le asignarían a cos (0°)? ¿Y a cos (90°)? Expliquen por qué.

d. ¿Qué valores le asignarían a sen (0°)? ¿Y a sen (90°)? Expliquen por qué.

> En *http://goo.gl/fYLQub* pueden encontrar un archivo de GeoGebra diseñado para explorar la situación de esta actividad.

**23.** Usando lo trabajado en esta página, averiguá sin calculadora los valores de tg (0°) y tg (90°).

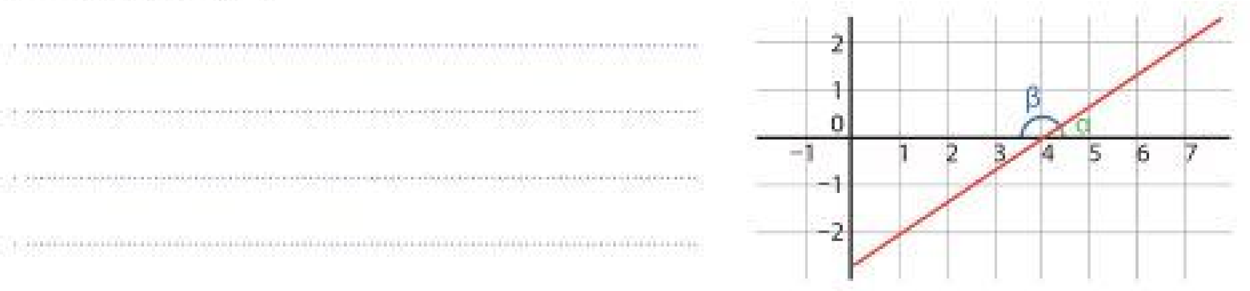
**24.** Sofía leyó en un libro que para cualquier ángulo α de un triángulo rectángulo siempre se cumple la igualdad $(\cos \alpha)^2 + (\text{sen } \alpha)^2 = 1$. Para argumentarlo dibujó un triángulo cualquiera, luego un triángulo semejante con una hipotenusa de 1 cm y, finalmente, usó el teorema de Pitágoras. En parejas, piensen cómo pudo seguir Sofía su argumentación.




**25.** Utilizando la relación de la actividad anterior y sabiendo que sen (30°) = $\frac{1}{2}$, justificá, sin calculadora, que cos (30°) = $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

# Relación entre la pendiente de una recta y la tangente de un ángulo

**26.** En parejas, calculen las amplitudes de α y β, dos de los ángulos que forma la recta con el eje *x*.




**27.** León y Olivia tenían que resolver este problema.

Dada la ecuación de la recta: $-4\,x + 5\,y = -16$, averiguá la tangente del ángulo agudo que forma la recta con el eje de las abscisas.

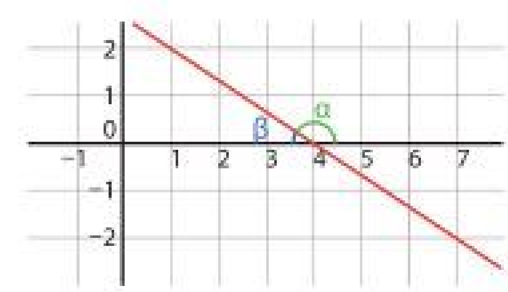
León
Yo despejé la *y* de la igualdad y con eso obtuve la pendiente de la recta. Ese es el valor de la tangente del ángulo pedido.



Olivia
Yo grafiqué la recta, inventé un triángulo rectángulo, calculé las medidas de sus catetos e hice el cociente entre ellas.

En parejas, decidan en la carpeta si las respuestas de León y Olivia son correctas. Si alguna no lo es, expliquen por qué. Si alguna lo es, hallen la tangente del ángulo siguiendo la estrategia y, luego, calculen la amplitud de ese ángulo.

**28.** Calculá la amplitud de estos dos ángulos que forma la recta con el eje *x*.




En estas actividades relacionaron la tangente de un ángulo y la pendiente de una recta. Si una recta tiene pendiente positiva, el valor de esta coincide con la tangente del ángulo agudo que forma la recta con el eje de las abscisas. Si la recta tiene pendiente negativa, el opuesto de ese valor corresponde a la tangente del ángulo agudo que forma la recta con el eje de las abscisas.

**29.** Calculá la amplitud de los ángulos que forman estas rectas con el eje *x*.

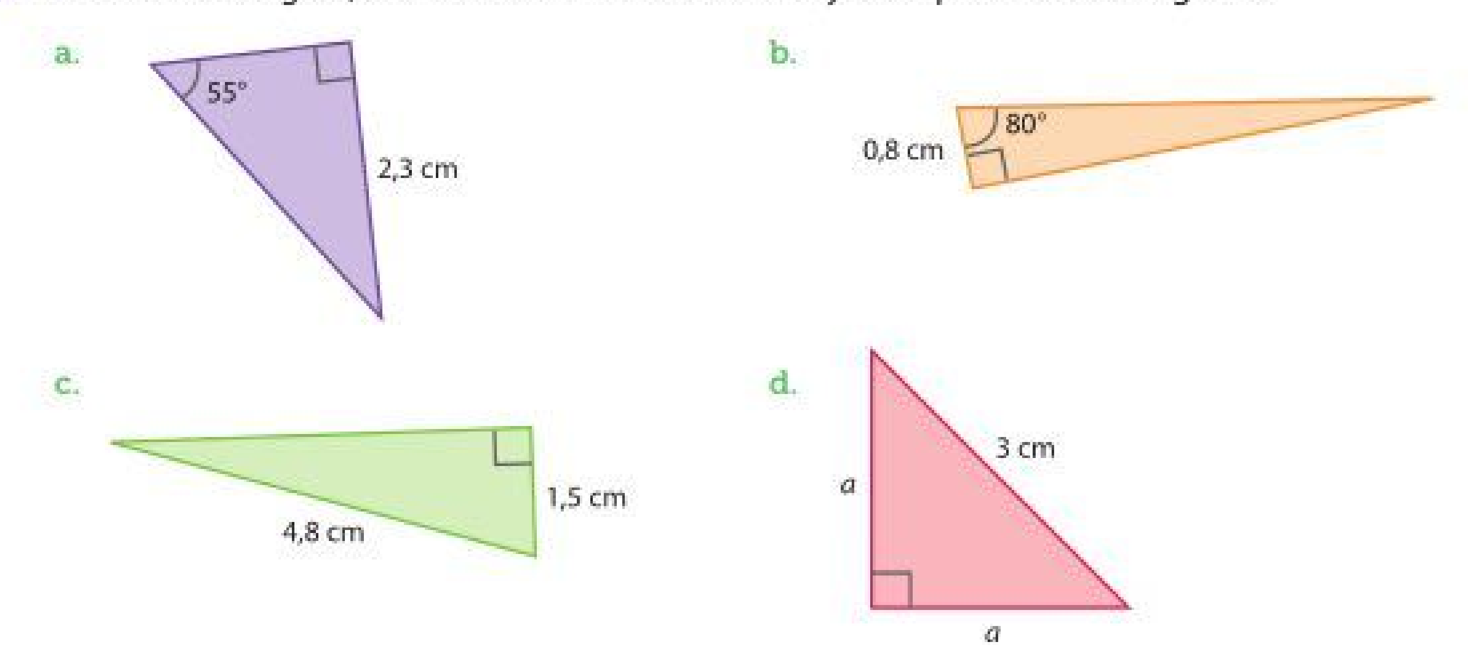
a. $-3\,x + 4\,y = 7$

b. $2\,x + 3\,y = 4$

**30.** Hallen la ecuación de una recta que pase por el punto (3 ; 4) y forme un ángulo de 45° con el eje *x*.

## Más actividades

**1.** Para cada triángulo, calculá la medida de los lados y la amplitud de los ángulos.




**2.** Para cada caso, decidí si existe un triángulo rectángulo que cumpla lo pedido. Si existe, decidí cuántos triángulos lo cumplen. Si no existe, explicá por qué.

a. Tiene un ángulo α que cumple $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

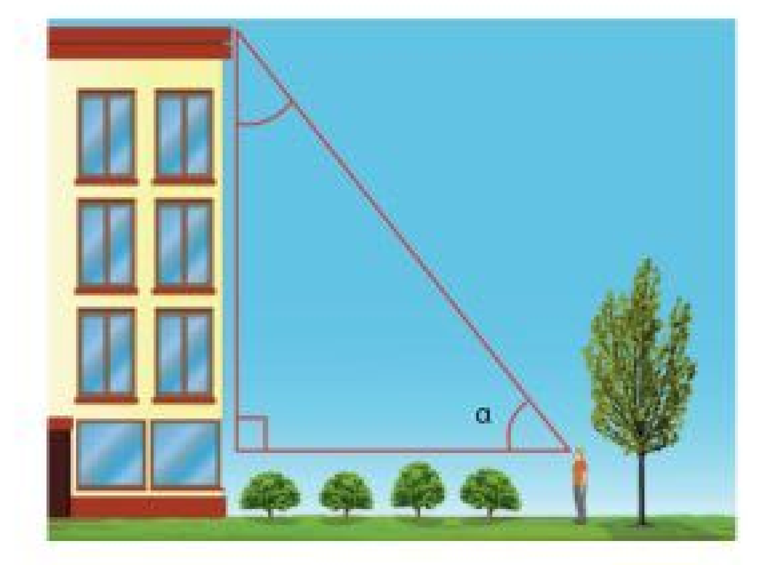
b. Tiene un ángulo β que cumple $\text{sen } \beta = 1$.

c. Tiene un ángulo γ que cumple $\text{sen } \gamma = \frac{5}{8}$, el cateto opuesto a γ mide 15 cm y la hipotenusa, 24 cm.

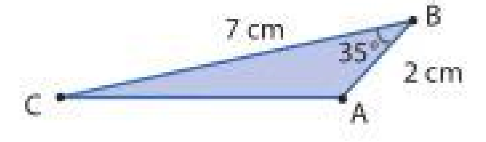
d. Tiene un ángulo φ que cumple $\text{tg }(\varphi) = 1$ y el triángulo no es isósceles.

**3.** El lado desigual de un triángulo isósceles mide 15 cm y la altura correspondiente a ese lado mide 4 cm. ¿Cuánto miden, aproximadamente, sus ángulos?

**4.** El edificio de Lucas mide 13 metros. A una distancia de 9 metros del edificio, Lucas mira la terraza. Sabiendo que él mide 1,8 metros, averiguá la amplitud del ángulo α.



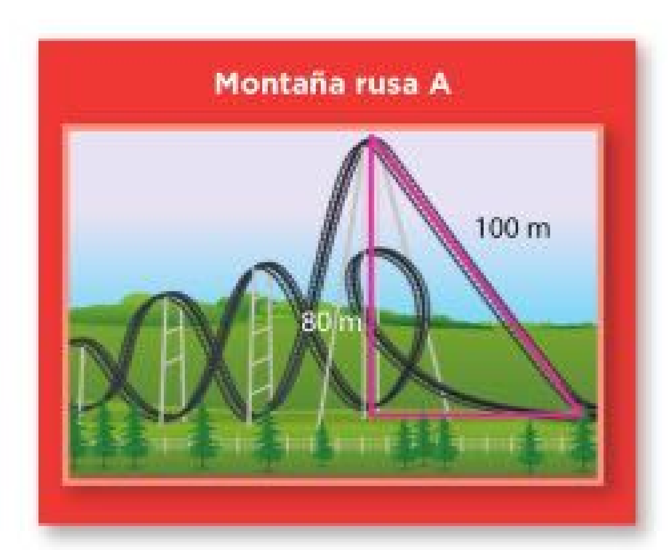

**5.** Analizá si se puede averiguar la medida de las tres alturas de este triángulo. En caso de no poder hallar alguna, explicá por qué no es posible.



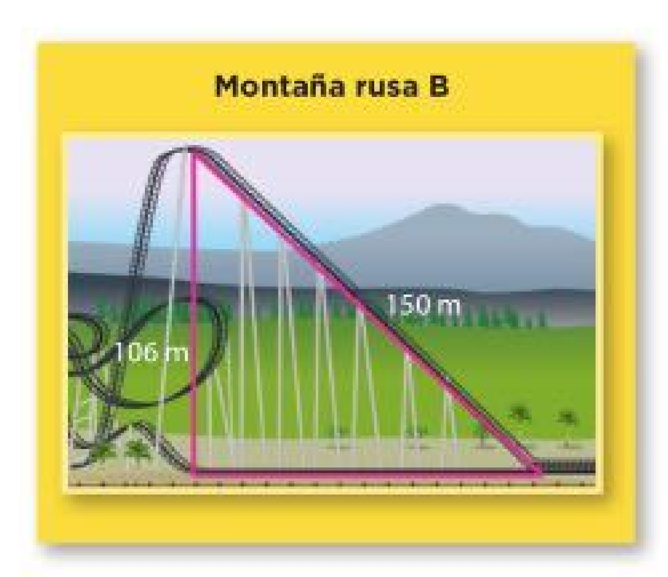
**6.** Un avión despega formando un ángulo α con el piso. Calculá la amplitud de α sabiendo que, después de recorrer 8.000 m en el aire en línea recta, el avión está a 4.500 m de altura.

**7.** Se eligieron cuatro montañas rusas para estudiar el tramo recto desde la máxima altura hasta el final del descenso. Usá los siguientes datos para ordenar de mayor a menor las cuatro montañas rusas según lo indicado en cada caso.

**Montaña rusa A**




**Montaña rusa B**




**Montaña rusa C**

Altura: 97 m.

Ángulo de inclinación: 70°.

**Montaña rusa D**

Ángulo de inclinación: 65°.

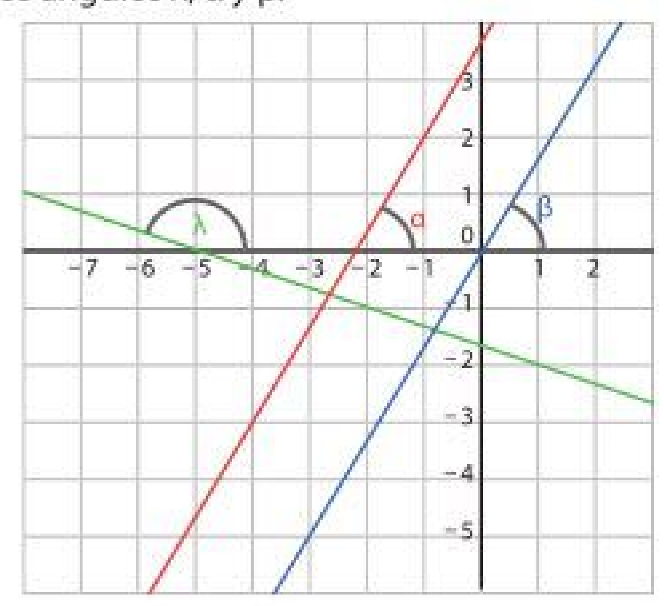
Longitud recorrida desde la máxima altura hasta el final del descenso: 330 m.

a. Mayor altura alcanzada.

b. Longitud recorrida desde su máxima altura hasta el final del descenso.

c. Ángulo de inclinación.

**8.** Hallá la amplitud de los ángulos λ, α y β.




**9.** Calculá la amplitud de los ángulos que forman estas rectas con el eje $x$.

a. $13\,y - 3\,x = -13$

b. $3\,y + x - 21 = 0$







**Estadística:** lectura de gráficos y tablas, población, muestra y variables; frecuencia y frecuencia relativa; medidas de tendencia central. **Probabilidad:** frecuencia, probabilidad condicional y conjunta.

# Estadística y Probabilidad

**1.** Se realizó una encuesta a los alumnos de dos escuelas, una de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires y otra de la provincia de Buenos Aires, para saber si tenían computadora en sus hogares. Los resultados se presentaron en esta tabla.

| | Hogares sin computadora | Hogares con computadora |
|---|---|---|
| Escuela de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires | 482 | 575 |
| Escuela de la provincia de Buenos Aires | 95 | 188 |

a. Para cada escuela, ¿cuál es el porcentaje de hogares con computadora respecto del total de hogares?

b. Si se considera el total de hogares de la Ciudad de Buenos Aires, ¿será igual la proporción de hogares con computadora y sin computadora que en la escuela encuestada?

## Población, muestra y variables

**2.** En el Censo Nacional 2010 se registraron los hogares que tenían computadora. Respondé las preguntas en la carpeta y explicá cómo te diste cuenta.

| Provincia | Hogares con computadora | Hogares sin computadora | Total de hogares | Hogares con computadora (en %) |
|---|---|---|---|---|
| Buenos Aires | 2.308.740 | 2.480.744 | 4.789.484 | 48,2 |
| Catamarca | 34.518 | 61.483 | 96.001 | 36 |
| Chaco | 85.393 | 203.029 | 288.422 | 29,6 |
| Chubut | 89.422 | 67.744 | 157.166 | 56,9 |
| C.A.B.A. | 789.145 | 360.989 | 1.150.134 | 68,6 |
| Córdoba | 510.197 | 521.646 | 1.031.843 | 49,4 |
| Corrientes | 86.184 | 181.613 | 267.797 | 32,2 |
| Entre Ríos | 164.184 | 210.937 | 375.121 | 43,8 |
| Formosa | 36.426 | 103.877 | 140.303 | 26 |
| Jujuy | 59.114 | 115.516 | 174.630 | 33,9 |
| La Pampa | 51.344 | 56.330 | 107.674 | 47,7 |
| La Rioja | 38.013 | 53.084 | 91.097 | 41,7 |
| Mendoza | 214.868 | 279.973 | 494.841 | 43,4 |
| Misiones | 86.162 | 216.791 | 302.953 | 28,4 |
| Neuquén | 90.178 | 79.879 | 170.057 | 53 |
| Río Negro | 97.439 | 101.750 | 199.189 | 48,9 |
| Salta | 97.607 | 202.187 | 299.794 | 32,6 |
| San Juan | 65.274 | 111.881 | 177.155 | 36,8 |
| San Luis | 71.376 | 55.546 | 126.922 | 56,2 |
| Santa Cruz | 52.176 | 29.620 | 81.796 | 63,8 |
| Santa Fe | 487.158 | 536.619 | 1.023.777 | 47,6 |
| Santiago del Estero | 51.099 | 166.926 | 218.025 | 23,4 |
| Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur | 28.714 | 10.242 | 38.956 | 73,7 |
| Tucumán | 124.454 | 244.084 | 368.538 | 33,8 |

a. ¿Cuál es la provincia con mayor porcentaje de hogares con computadora? ¿Y menor?

b. ¿Es cierto que si es mayor el porcentaje de hogares con computadora, entonces hay mayor cantidad de hogares con computadora?

c. ¿Cuál es el porcentaje de hogares con computadora en la provincia de Buenos Aires y en CABA? Comprará tu respuesta con la dada en la actividad 1.

d. Corrientes y Misiones tienen casi la misma cantidad de hogares con computadora, pero los porcentajes son diferentes. ¿Por qué ocurre esto?

## Lectura de gráficos

**3.** Durante las elecciones presidenciales, dos partidos políticos hicieron encuestas telefónicas, eligiendo números al azar, para medir la intención de voto para cada candidato. El partido A encuestó a 3.000 personas de las provincias de Buenos Aires, Santiago del Estero y Santa Fe. El partido B encuestó a 5.000 personas de todas las provincias y respetando que el porcentaje de personas elegidas en cada una fuera igual al porcentaje de población de esa provincia respecto de la población total del país. La información que obtuvo cada partido se volcó en los siguientes gráficos. Resuelvan las consignas en parejas.







En esta actividad se usan **gráficos de barras**, que están formados por rectángulos de alturas proporcionales a las cantidades de cada dato.

a. Calculen los porcentajes correspondientes a cada candidato según la encuesta de cada partido político.

.................................................................................................

b. ¿Pueden explicar las diferencias de resultados que hay entre las encuestas?

.................................................................................................

**4.** Al finalizar la votación de la elección para presidente, los resultados fueron: 48,60% para el candidato 1 y 51,40% para el candidato 2. ¿Qué partido político se acercó más a los resultados reales? ¿Por qué piensan que sucedió eso?

.................................................................................................

Cuando se realiza un estudio estadístico, el conjunto de todas las personas o elementos que se está estudiando se denomina **población**. Por ejemplo, en la Argentina, cada 10 años se realiza un censo para estudiar, entre otras cuestiones, determinadas características de todos los hogares del país.
Pero, como muchas veces resulta difícil estudiar una característica de todos los miembros de una población, se estudia solo una parte, a la cual se denomina **muestra**. Para que los resultados obtenidos con la muestra sean similares a los que se obtendrían estudiando toda la población, la muestra tiene que ser lo más representativa posible. En la actividad 3, la muestra del partido B es más representativa que la del partido A.

En estas cuatro primeras actividades se analizaron características de una población: si poseen o no computadoras, si van a votar a un candidato o a otro. Cada una de las características de una población que se quiere analizar se llama **variable estadística**.

**5.** La entrenadora de un equipo de hockey femenino midió la altura de las jugadoras y luego armó esta tabla. Resolvé las consignas en la carpeta.

| Altura (en m) | [1,49 ; 1,54) | [1,54 ; 1,59) | [1,59 ; 1,64) | [1,64 ; 1,69) | [1,69 ; 1,74) | [1,74 ; 1,79] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de jugadoras | 2 | 4 | 1 | 14 | 5 | 4 |

a. ¿Cuántas jugadoras midió la entrenadora?

b. ¿Cuántas jugadoras miden menos de 1,59 m?

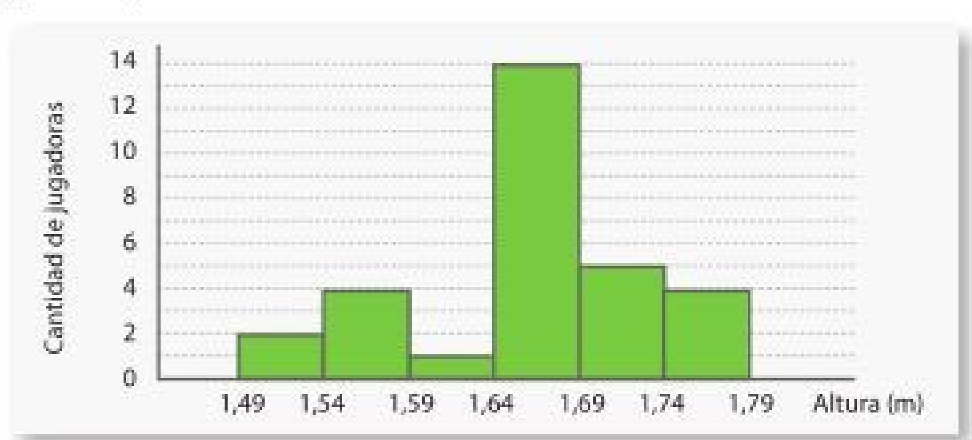
c. ¿Qué parte del total de jugadoras mide 1,69 m o más?

d. ¿Qué porcentaje del total de las mediciones está en el intervalo [1,59 ; 1,69)?

e. Realizá un gráfico que represente los datos de la tabla.

Los intervalos numéricos se pueden escribir usando paréntesis o corchetes en sus extremos. Cuando hay un corchete, significa que ese extremo está incluido en el intervalo. Si hay un paréntesis, ese extremo no se incluye. Por ejemplo, [1,59 ; 1,69) es el conjunto de todos los números entre 1,59 y 1,69 incluyendo 1,59, pero sin incluir 1,69. En general, se incluye el extremo inferior y no se incluye el extremo superior de cada intervalo, excepto en el último, en el cual se incluyen los dos extremos.

**6.** Para la actividad anterior, Leo hizo el siguiente gráfico. ¿Qué significa cada barra? ¿Qué representa la altura de las barras?




**7.** Una profesora les pregunta a sus alumnos cuánto tiempo por día miran televisión. Luego, vuelca los datos en esta tabla.

| Horas de televisión por día | De 0 a 2 | De 3 a 5 | De 6 a 8 | De 9 a 11 |
|---|---|---|---|---|
| Cantidad de alumnos | | | | |

a. Cuando quiso ubicar la respuesta de Matías, no pudo. ¿Cuál puede ser la cantidad de horas por día que mira televisión Matías?

b. Modificá la tabla para poder volcar en ella todas las respuestas posibles de los alumnos. ¿Hay una única manera de modificarla?

En la actividad 6, Leo realizó un gráfico que se llama histograma. Un **histograma** está formado por barras consecutivas cuyo ancho es proporcional a la amplitud de cada intervalo y su altura es proporcional a la cantidad correspondiente al intervalo, de manera que al multiplicar la amplitud por la altura, el resultado es igual a la cantidad correspondiente al intervalo. Si todos los intervalos tienen igual amplitud, esta puede tomarse como unidad y la altura correspondiente a cada intervalo será igual a la frecuencia.

**8.** a. En grupos, organicen una encuesta en el curso para estudiar las siguientes características: el género, la edad, la altura, el grupo sanguíneo, la localidad donde viven, la cantidad de hermanos, la materia que prefieren y la materia que les resulta más difícil. Si quieren, pueden agregar otra característica.

b. Indiquen cuáles de las características encuestadas se miden con un número y cuáles no.

..........................................................................................................

..........................................................................................................

c. Elijan una de las características de la encuesta y tomen las respuestas de sus compañeros del curso. Luego, presenten la información de la manera que consideren más conveniente.

En las actividades anteriores trabajaron con distintas variables. Las que toman valores numéricos se denominan **variables cuantitativas**. Por ejemplo, la altura de las jugadoras de hockey. Las variables que no se pueden medir con números se llaman **variables cualitativas**. Por ejemplo, si se tiene o no computadora.
Las variables cuantitativas pueden ser **continuas**, si sus resultados pueden tomar cualquier número, como la altura o el peso; o **discretas**, si se pueden numerar, como la edad o la cantidad de hermanos.

Cuando los datos son muchos, resulta conveniente agruparlos en intervalos, llamados **intervalos de clase**, para poder analizarlos mejor. Si la variable es continua, los valores pueden ser todos diferentes, ya que hay infinitos números posibles que esta puede tomar. Entonces es necesario agruparlos en intervalos.

**9.** Estos son los pesos (en kilogramos) de los estudiantes de 3.° A de una escuela. Respondé las preguntas en la carpeta.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 59,5 | 65 | 54,5 | 63,3 | 43,6 | 48,7 | 41,5 | 47,9 | 63,1 |
| 50 | 59 | 54 | 52,5 | 56 | 57 | 48,1 | 50,2 | 50 | 50 |
| 41 | 47,1 | 62 | 63 | 47,2 | 52 | 68,1 | 69,9 | 64,5 | 50 |
| 61 | 59 | 58 | 44,9 | 49 | 52 | 52,3 | 53,1 | 48 | 48 |

a. Completá la segunda fila de la siguiente tabla.

| Peso (en kg) | [40 ; 45) | [45 ; 50) | [50 ; 55) | [55 ; 60) | [60 ; 65) | [65 ; 70] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de alumnos | 4 | 8 | | | | |
| | | | | | | |

b. ¿Cuántos alumnos pesan menos de 55 kg? ¿Y menos de 65 kg?

c. ¿Cómo podrías completar la tercera fila para que te ayude a responder las preguntas anteriores más rápidamente?

d. ¿Qué porcentaje de estudiantes pesa 60 kg o más?

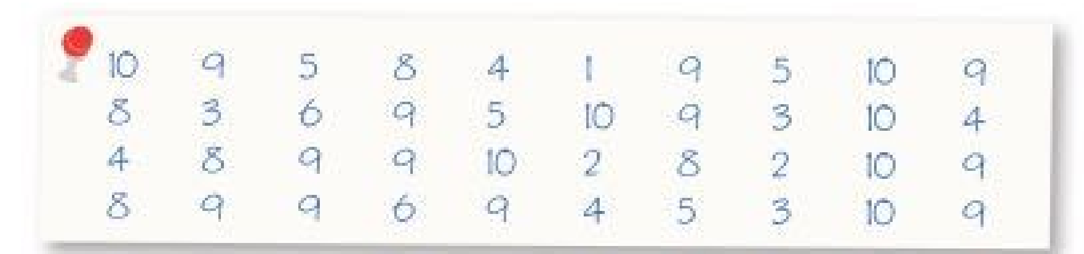
e. ¿Cuántos alumnos pesan menos de 53 kg?

f. Realizá un gráfico con los datos de las dos primeras filas.




## Frecuencia y frecuencia relativa

**10.** Estas son las notas de un examen de Matemática de los alumnos de 3.° A.



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 5 | 8 | 4 | 1 | 9 | 5 | 10 | 9 |
| 8 | 3 | 6 | 9 | 5 | 10 | 9 | 3 | 10 | 4 |
| 4 | 8 | 9 | 9 | 10 | 2 | 8 | 2 | 10 | 9 |
| 8 | 9 | 9 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 10 | 9 |

a. Organizá las notas en la siguiente tabla.

| Notas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de alumnos con esa nota | | | | | | | | | | |
| Cantidad de alumnos con esa nota o menos | | | | | | | | | | |
| Proporción de alumnos con esa nota | | | | | | | | | | |

b. ¿Cuál es la nota que más se repite? ¿Y la que menos se repite?

c. ¿Cuántos alumnos obtuvieron 10? ¿Qué parte representan del total de alumnos? ¿Qué porcentaje de alumnos se sacó 10?

d. Si la evaluación se aprueba con 7 o más, ¿qué porcentaje de alumnos aprobó?

**11.** Las notas de 3.° B para la misma evaluación son las de la siguiente tabla. ¿Cuál de los dos cursos tuvo mejor rendimiento? Explicá tu respuesta en la carpeta.

| Nota | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 4 | 9 | 6 | 3 | 0 |

En la tabla de la actividad 11 hay dos filas; en la primera se ubican los valores que toma la variable y en la segunda, la cantidad de veces que la variable tomó cada valor. Esta última cantidad se denomina **frecuencia** o, también, **frecuencia absoluta**.
A veces, como en la actividad 9, se incluye una fila más, que muestra la cantidad de veces que aparece un valor menor o igual al dado en la columna correspondiente. Esa cantidad se llama **frecuencia acumulada**.
En la tabla de la actividad 10 también hay una fila donde se indica qué parte representa la frecuencia absoluta de cada valor respecto del total de datos. Este cociente se llama **frecuencia relativa**, y se calcula así:

$$\textbf{Frecuencia relativa} = \frac{\textbf{Frecuencia absoluta}}{\textbf{Cantidad total de datos}}$$

Las tablas que incluyen al menos uno de los tres tipos de frecuencias se denominan **tablas de frecuencias**.

En general, se dan las frecuencias relativas en términos de porcentajes. Para calcular ese porcentaje se multiplica la frecuencia relativa por 100.

## Medidas de tendencia central

**12.** En una pequeña empresa con 10 empleados, los salarios son los siguientes: $4.500, $6.200, $7.000, $7.000, $7.500, $7.500, $8.000, $8.300, $9.000 y $10.000. Si tuvieras que dar un valor que representara a todos los salarios de esa empresa, ¿cuál darías? ¿Por qué?

..........................................................................................

**13.** a. En tu carpeta, calculá el promedio de salarios de la actividad anterior.

b. ¿Qué sucedería con el promedio de los salarios si estos fueran los siguientes: $4.500, $6.200, $7.000, $7.000, $7.500, $7.500, $8.000, $8.300, $9.000 y $80.000. Explicá tu respuesta.

Para calcular el **promedio** se suman todos los datos y el resultado se divide por la cantidad de datos.

**14.** En parejas, consideren las notas de la actividad 10 y resuelvan las consignas.

a. ¿Cuál es la nota promedio del curso?

b. ¿Cuántos alumnos obtuvieron la nota promedio? ¿Cómo se explica eso?

c. ¿El promedio es representativo de la situación del curso? Si les parece que sí, expliquen por qué. Si les parece que no, justifiquen y propongan otra nota que consideren representativa.

d. ¿Cuál es la nota que no logró superar el 50% de los alumnos? Es decir, ¿la mitad de los estudiantes obtuvieron una calificación menor o igual a qué nota?

Las calculadoras tienen un modo estadístico, indicado con las siglas "SD", que permite calcular el promedio de un conjunto de datos ingresados individualmente, no en intervalos.

**15.** Para estudiar cómo influyen las asignaciones familiares en los salarios, se tomó una muestra de trabajadores para establecer la cantidad de hijos menores que tiene a cargo cada uno y se obtuvo la siguiente información.

| Hijos a cargo | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de trabajadores | 5 | 20 | 2 | 7 | 3 | 2 | 1 |

a. ¿Cuántos hijos, en promedio, tiene cada trabajador?

b. ¿Cuántos trabajadores tienen más hijos que el promedio?

c. ¿Cuántos hijos tiene la mayoría de los trabajadores?

d. Del 50% de los trabajadores que tienen menos hijos, ¿cuál es la cantidad máxima de hijos que tienen?

**16.** En un club se hizo un registro de las edades de sus socios y se agruparon los datos en intervalos de la siguiente manera. Resolvé las consignas en tu carpeta.

| Edad | [6 ; 12) | [12 ; 18) | [18 ; 24) | [24 ; 30) | [30 ; 36) | [36 ; 42) | [42 ; 48) | [48 ; 54) | [54 ; 60) | [60 ; 66) | [66 ; 72] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Socios | 95 | 96 | 40 | 14 | 2 | 1 | 1 | 3 | 10 | 23 | 97 |

Si solo se tiene la tabla, ¿se puede calcular el promedio de edades? Si se puede, explicá cómo. Si no se puede, ¿se te ocurre una manera de aproximarlo?

**17.** Nicolás dice que la edad promedio de los socios del club de la actividad anterior es 33 años, aproximadamente. Para calcularlo, hizo lo siguiente.

Podemos tomar el valor que está en la mitad de cada intervalo y multiplicarlo por la frecuencia de ese intervalo. Luego sumamos todos esos productos y dividimos el resultado por la cantidad total de socios.

$$\text{Promedio} = \frac{9 \cdot 95 + 15 \cdot 96 + 21 \cdot 40 + 27 \cdot 14 + 33 \cdot 2 + 39 \cdot 1 + 45 \cdot 1 + 51 \cdot 3 + 57 \cdot 10 + 63 \cdot 23 + 69 \cdot 97}{382} = 32{,}8$$

¿Por qué Nicolás toma el valor que está en la mitad de cada intervalo? ¿Por qué lo multiplica por la frecuencia del intervalo?

..........................................................................................

..........................................................................................

**18.** Respondé en la carpeta usando tus conclusiones de las actividades 16 y 17.

a. ¿Cuál es el rango de edad que más se repite?

b. ¿Cuál es el porcentaje de socios menores de edad?

c. ¿Qué edad o rango de edad representa las edades de todos los socios?

Para calcular el promedio de datos ordenados en una tabla de frecuencias, en lugar de sumar todos los datos tantas veces como aparecen, se puede multiplicar cada dato por su frecuencia absoluta.

**19.** Los empleados de una empresa reclaman un aumento salarial; dicen que la mayoría tiene un sueldo menor a $5.000. Los dueños dicen que los sueldos están bien, ya que el promedio es de $16.000. Esta tabla muestra la distribución de los sueldos. En parejas, calculen el promedio de sueldos y el porcentaje de empleados que cobran menos de $5.000. Discutan qué muestran los resultados.

| Sueldo (en miles de $) | [0 ; 5) | [5 ; 10) | [10 ; 15) | [15 ; 20) | [20 ; 25) | [25 ; 30) | [30 ; 35) | [95 ; 100) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de empleados con ese sueldo | 159 | 75 | 2 | 2 | 1 | 9 | 24 | 28 |

Cuando se tienen muchos datos, a veces se considera un valor que los represente para dar una idea de la totalidad de ellos. Comúnmente se usa el **promedio** o **media aritmética**. Por ejemplo, en la segunda consigna de la actividad 13, el promedio de sueldos es $14.500.
Además, es conveniente tener otras dos medidas relacionadas con el conjunto de datos, para tener información relevante de ellos. Una de estas medidas es el valor que más se repite, que se llama **moda**; por ejemplo, la moda de los datos de la actividad 10 es 9.
La otra medida que puede ser representativa es la **mediana**, que es el valor que se encuentra en el medio al ordenar todos los datos de menor a mayor. Por ejemplo, en la actividad 13, la mediana es $7.500.
El promedio, la moda y la mediana son **medidas de tendencia central**.

Cuando los datos están agrupados en intervalos, no se puede calcular el promedio, pero se lo puede aproximar tal como hizo Nicolás en la actividad 17, considerando el valor medio de cada intervalo, que es la **marca de clase**. Para el caso de la moda, el intervalo que más se repite se denomina **intervalo modal**.

**20.** Calculá las medidas de tendencia central de la actividad 16.

## Frecuencia relativa y probabilidad

**21.** Nico y Luis inventaron un juego: lanzan dos dados y calculan la diferencia entre los números que salen, de manera que les dé un número positivo. Si la diferencia es 0, 1 o 2, Nico gana un punto. Si es 3, 4 o 5, lo gana Luis. Luego de 50 tiradas, el que obtiene más puntos, gana. Estos son los resultados de la primera partida.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 | 2 | 4 | 4 | 3 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 5 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 4 | 5 | 2 | 0 |
| 5 | 2 | 4 | 0 | 3 | 1 | 0 | 3 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 1 | 4 |

Completá la tabla de frecuencias e indicá quién ganó.

| Resultado | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia absoluta | | | | | | |
| Frecuencia relativa | | | | | | |

**22.** Nico y Luis volvieron a jugar y obtuvieron estos resultados. Completá la tabla de frecuencias e indicá quién ganó.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 2 | 4 | 0 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 | 2 | 3 | 2 | 4 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 5 | 4 | 1 | 1 | 4 | 2 | 3 | 0 | 4 |

| Resultado | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia absoluta | | | | | | |
| Frecuencia relativa | | | | | | |



**23.** a. Jueguen en parejas al juego de Nico y Luis haciendo dos partidas de 50 tiradas cada una. Vayan anotando los resultados.

b. Completen la tabla correspondiente a las cuatro partidas, las dos de ustedes y las dos de Nico y Luis.

| Resultado | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia absoluta de las 200 tiradas | | | | | | |
| Frecuencia relativa de las 200 tiradas | | | | | | |
| Probabilidad | | | | | | |

c. ¿Les parece que este juego es equitativo, es decir que ambos tienen la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?

d. ¿Cuál es el resultado de sumar todas las frecuencias relativas? ¿Por qué?

Para realizar esta actividad necesitan dos dados, o bien un celular o una computadora con una aplicación que simule tirar dos dados.

**24.** Nico y Luis inventaron otro juego, que consiste en sumar los números que salen en los dados. Si la suma resulta un número par, Nico gana un punto. Si resulta un número impar, Luis gana el punto. Se realizan 50 tiradas y el que obtiene más puntos, gana. Los resultados de la primera partida fueron los siguientes.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 7 | 6 | 7 | 3 | 9 | 8 | 10 | 5 | 7 | 10 | 4 | 11 | 8 | 11 | 4 | 11 | 5 | 7 | 8 | 9 | 7 | 6 | 7 |
| 7 | 10 | 8 | 4 | 6 | 8 | 5 | 9 | 7 | 6 | 8 | 3 | 7 | 10 | 5 | 7 | 9 | 6 | 8 | 10 | 4 | 6 | 9 | 8 | 5 |

a. ¿Quién ganó?

b. Jueguen en parejas y luego armen una tabla de frecuencias considerando dos partidas de 50 tiradas cada una.

c. ¿Les parece que este juego es más justo que el de la actividad anterior? ¿Por qué?

**25.** Alejo juega a lanzar una moneda y observar el lado que sale. Pero le resulta extraño que la mayoría de las veces sale cara. Piensa: "La probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{2}$, es decir, la mitad, pero en esta moneda parece que hay más posibilidades de que salga cara. Debe estar cargada." Entonces, para saber si tiene razón, comienza a lanzar la moneda muchas veces y a registrar lo que sale.

*Primeras 100 tiradas: 61 caras y 39 cecas. Segundas 100 tiradas: 65 caras y 35 cecas. Terceras 100 tiradas: 47 caras y 53 cecas. Cuartas 100 tiradas: 67 caras y 33 cecas. Quintas 100 tiradas: 70 caras y 30 cecas.*

a. Armá una tabla de frecuencias relativas con las 500 tiradas.

| | Caras | Cecas |
|---|---|---|
| Frecuencia relativa de 500 tiradas | | |

b. ¿Tiene razón Alejo? ¿Cómo te diste cuenta?

En un experimento aleatorio no se puede anticipar qué ocurrirá. Pero, al repetirlo muchas veces, es posible estudiar la frecuencia con la que aparece un determinado resultado, ya que su frecuencia relativa tiende a estabilizarse alrededor de un valor. Por ejemplo, al tirar dos dados y calcular la diferencia entre los dos resultados obtenidos, no se puede saber si dará 0, 1, 2, 3, 4 o 5. Pero, como analizaron en la actividad 23, si se repite ese experimento muchas veces, la frecuencia relativa de la diferencia 0 se aproxima al número $\frac{1}{6}$, es decir que las chances de obtener diferencia 0 al tirar dos dados y restar sus resultados es de 1 cada 6 jugadas. Se dice entonces que la probabilidad de que la diferencia sea 0 al tirar dos dados es $\frac{1}{6}$.
En general, dado un experimento aleatorio, se dice que la **probabilidad** de que salga un cierto resultado es el valor al que se aproxima la frecuencia relativa cuando el experimento se realiza muchas veces.

En la actividad 25, la probabilidad de que salga cara no es igual a la probabilidad de que salga ceca, es decir que los dos sucesos posibles no son equiprobables, y entonces no se puede calcular la probabilidad haciendo el cociente entre casos favorables y casos posibles. Ese cociente es $\frac{1}{2}$, pero en este caso, $P(cara) > \frac{1}{2}$ y $P(ceca) < \frac{1}{2}$. Para averiguar estas probabilidades hay que observar la tendencia de las frecuencias relativas obtenidas al lanzar muchas veces la moneda.

## Sucesos mutuamente excluyentes

**26.** De un bolillero que contiene 5 bolillas azules, 8 rojas y 7 verdes se extrae una bolilla al azar, se anota su color y se la vuelve a guardar en el bolillero.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bolilla roja? ¿Y azul? ¿Y verde?

b. Si el experimento se repite 100 veces, ¿cuántas bolillas de cada color saldrán? ¿Por qué?

c. ¿Cuánto da la suma de las probabilidades de cada color?

**27.** De un mazo de 48 cartas españolas se saca una carta al azar, se anota cuál es y se la vuelve a guardar en el mazo. Respondé en la carpeta.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 3 o un 12?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una carta de copa o de basto?

c. ¿Es más probable que la carta sea 1 o un 2, o que sea un 11 o un 12?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una carta que sea par o mayor que 5?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una carta que sea par y mayor que 5?

f. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una carta que sea de copa y de basto?

**28.** Para la clase de Educación física, los alumnos de tercer año deben elegir un deporte entre vóley, fútbol, hándbol o gimnasia. Eligieron de esta manera.

| | Vóley | Fútbol | Hándbol | Gimnasia |
|---|---|---|---|---|
| Varones | 2 | 12 | 4 | 0 |
| Mujeres | 8 | 3 | 1 | 5 |

Considerá que se selecciona al azar un estudiante de ese curso.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ese estudiante prefiera fútbol o vóley?

b. ¿La probabilidad de que el estudiante elegido prefiera fútbol o vóley es igual a la probabilidad de que prefiera fútbol sumada a la probabilidad de que prefiera vóley? Es decir, ¿es cierta la siguiente igualdad?

P(fútbol o vóley) = P(fútbol) + P(vóley)

c. ¿Y esta igualdad es cierta?: P(mujer o vóley) = P(mujer) + P(vóley).

d. Escribí un ejemplo de dos sucesos A y B de este experimento que cumplan P(A o B) = P(A) + P(B). Luego escribí dos que no lo cumplan.

e. ¿En qué condiciones te parece que se cumple que P(A o B) = P(A) + P(B)?

Si dos sucesos A y B no pueden ocurrir al mismo tiempo, por ejemplo que una carta sea de oro y de basto, que un número sea par e impar, se dice que los sucesos son **mutuamente excluyentes** o **incompatibles**.
En estos casos, la probabilidad de que suceda uno u otro suceso es igual a la suma de sus probabilidades: P(A o B) = P(A) + P(B).
Si los sucesos son incompatibles y juntos componen todo el espacio muestral, entonces la suma de las probabilidades de esos sucesos es 1.
Por ejemplo, en la actividad 26, P(azul) + P(rojo) + P(verde) = 1.

Recuerden que el **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio y que se denomina **suceso** a cualquier resultado o conjunto de resultados.

**29.** El novio le regala a Nuria una caja con 12 chocolates blancos y 18 negros. Además, 4 de los blancos tienen relleno de menta, 3 de dulce de leche y 5 de mousse de chocolate; de los negros, hay 4, 8 y 6, respectivamente, con esos rellenos. A Nuria no le gustan los chocolates de menta, pero no los puede distinguir a simple vista, así que elige uno al azar y lo prueba.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el chocolate elegido tenga relleno de menta?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el relleno no sea de menta?

c. Si el chocolate elegido es negro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de menta?



**30.** Se tira un dado y luego otro. Resuelvan las consignas en grupos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par en el primer dado y un número impar en el segundo?

b. Si en el primer dado salió un 2, ¿cuál es la probabilidad de que salga un 5 en el otro?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el mismo número en los dos dados?

d. Si en el primer dado sale un 3, ¿cuál es la probabilidad de que en el otro dado también salga un 3? ¿Esa probabilidad es diferente si en el primer dado sale otro número?

**31.** En un programa de televisión se realiza el siguiente juego: el conductor hace un tiro de ruleta sin que lo vea el participante y este último debe adivinar en qué casilla quedó la bolilla. Antes de arriesgar, el participante tiene la opción de pedirle al conductor que le diga el color del casillero en el que está la bolilla y, en caso de que adivine, obtiene un premio menor al que le darían si no hubiese pedido el color.



a. ¿Por qué el premio es menor si pide el color?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla caiga en el 26 negro?

c. Si al participante le dicen que la bolilla quedó en una casilla negra, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el 26 negro?

La ruleta está formada por 37 números, 18 negros, 18 rojos y uno de color verde, que tiene el 0. De los negros, 10 son números pares, y de los rojos, 8 son pares.

## Probabilidad condicional y probabilidad conjunta

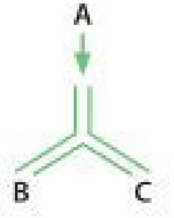
En la actividad anterior, la probabilidad de que salga el 26 negro, sabiendo que la casilla es de color negro, es diferente a la probabilidad de que salga el 26 negro. Es decir que esta última probabilidad se modificó al saber que la casilla era negra.
Cuando esto sucede, se dice que los sucesos son **dependientes** entre sí y la probabilidad calculada es una **probabilidad condicional**. La probabilidad del suceso A sabiendo que es cierto el suceso B se simboliza P(A/B) y se dice "probabilidad de A dado B".
Por ejemplo, en la actividad 29, la probabilidad de que un chocolate sea de menta dado que es negro se calcula:
$P(\text{menta/negro}) = \frac{\text{cantidad de chocolates negros y de menta}}{\text{cantidad de chocolates negros}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.
En general, la probabilidad condicional P(A/B) se define:

$$\mathbf{P(A/B)} = \frac{\textbf{cantidad de A y B}}{\textbf{cantidad de B}}$$

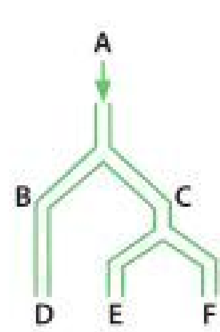
En la actividad 30 se analizó que, si tiramos 2 dados, saber o no lo que sucede en uno de ellos no cambia lo que sucede en el otro, que salga un 3 en un dado no modifica la probabilidad de que salga otro 3 en el segundo dado.
Cuando la probabilidad de que ocurra un suceso no se ve afectada por la ocurrencia o no de otro suceso, se dice que son sucesos **independientes** entre sí. En ese caso, P(A/B) = P(A) y P(B/A) = P(B).

**32.** Resuelvan las siguientes consignas en grupos.

a. El tren de una ciudad tiene dos ramales con un tramo en común, como indica la figura. De los trenes que parten de A, la mitad van hacia B y la otra mitad, hacia C. Cada tren lleva escrito su destino para orientar a los pasajeros. Leo quiere ir hasta la ciudad B y toma el tren en A, sin mirar el cartel de destino. ¿Cuál es la probabilidad de que Leo llegue a la ciudad B? ¿Y a la ciudad C?




b. Los trenes que llegan a la ciudad B siguen a la ciudad D. De los trenes que llegan a la ciudad C, la mitad van hasta la ciudad E y la otra mitad hasta F. ¿Cuál es la probabilidad de que Leo llegue a la ciudad F? ¿Es cierto que la probabilidad de que llegue a D o E o F es la misma?




**33.** Decidí si las siguientes afirmaciones respecto de la situación de la actividad 30 son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones.

a. La probabilidad de que salgan números diferentes en cada dado es $\frac{15}{36}$.

b. La probabilidad de que salga 3 en el primer dado y 6 en el segundo es $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

c. La probabilidad de que salga 3 en el primer dado y 6 en el segundo es $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.

**34.** En una urna hay 7 papeles de color rojo y 13 de color azul. Se extrae un papel al azar, se anota su color, se vuelve a introducir en la urna y se saca otro papel.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer papel sea rojo y el segundo, azul?

b. Si el primer papel es rojo, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo sea azul?

**35.** Respondé las preguntas de la actividad anterior, teniendo en cuenta que de la misma urna se extraen 2 papeles uno tras otro sin reponerlos.

**36.** Juan le propone un juego a Ciro. En una bolsa coloca 4 papeles con las letras C, I, R y O; luego Ciro extrae sucesivamente los papeles y gana si las saca en el orden en el que están en su nombre. Ciro dice que tiene muy pocas chances de ganar y Juan le responde que no son tan bajas. Los dos analizan el juego y escriben lo siguiente. ¿Quién tiene razón?

Ciro

La probabilidad de que salga cualquier letra es $\frac{1}{4}$. Entonces, la probabilidad de que se forme el nombre Ciro es: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$.

Juan

La probabilidad de que salga primero la C es $\frac{1}{4}$, la probabilidad de que después salga la I es $\frac{1}{3}$, porque ahora quedan 3 papeles, y luego la probabilidad de que salga la R es $\frac{1}{2}$, porque quedan 2 papeles y, finalmente, la probabilidad de que salga la O es 1, porque es la única letra que queda. Por lo tanto, la probabilidad de sacar las letras en orden para que se forme el nombre Ciro es: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$.



Cuando dos sucesos son **independientes**, la probabilidad de que ocurran ambos a la vez se calcula multiplicando la probabilidad de que ocurra cada uno de ellos, es decir: **P(A y B) = P(A) · P(B)**.
Por ejemplo, en la actividad 33, la probabilidad de que salga un 3 en el primer dado y un 6 en el segundo es igual a la probabilidad de que salga un 3 en un tiro multiplicado por la probabilidad de que salga un 6 en un tiro, es decir: $P(3 \text{ y } 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
Pero si los sucesos **no son independientes**, la probabilidad de que ocurran ambos a la vez se calcula multiplicando la probabilidad de que ocurra uno de ellos por la probabilidad de que ocurra el otro, sabiendo que sucedió el primero; es decir: **P(A y B) = P(A) · P(B/A)**.
Por ejemplo, en la actividad 35, cuando no se reponen los papeles, la probabilidad de cada extracción se ve afectada por lo que sucedió en las extracciones anteriores. Entonces, la probabilidad de que salga un papel rojo la primera vez y azul la segunda se puede calcular así:
$P(1.° \text{ rojo y } 2.° \text{ azul}) = P(1.° \text{ rojo}) \cdot P(2.° \text{ azul} / 1° \text{ rojo}) = \frac{7}{20} \cdot \frac{13}{19}$.

De esto se deduce que la probabilidad condicional también se calcula dividiendo la probabilidad conjunta y la probabilidad simple: $P(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$.

**37.** En una escuela se sortea una beca entre 120 alumnos, 50 de primaria y 70 de secundaria. Además, 65 son varones y de ellos, 45 cursan la secundaria.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador sea un varón?

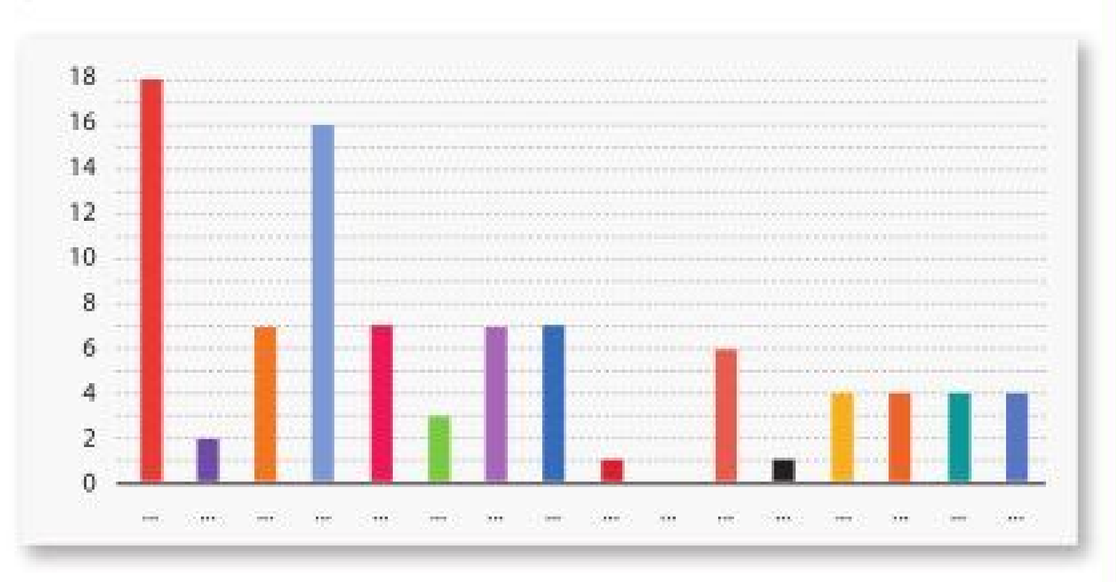
b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón y que curse la secundaria?

c. Si el ganador es varón, ¿cuál es la probabilidad de que curse la secundaria?

# Más actividades

**1.** La siguiente tabla muestra los goles que cada equipo realizó en la Copa América 2016.

| Posición | Selección | Goles |
|---|---|---|
| 1 | Chile | 16 |
| 2 | Argentina | 18 |
| 3 | Colombia | 7 |
| 4 | Estados Unidos | 7 |
| 5 | Perú | 4 |
| 6 | Venezuela | 4 |
| 7 | México | 6 |
| 8 | Ecuador | 7 |
| 9 | Brasil | 7 |
| 10 | Costa Rica | 3 |
| 11 | Uruguay | 4 |
| 12 | Panamá | 4 |
| 13 | Paraguay | 1 |
| 14 | Bolivia | 2 |
| 15 | Jamaica | 0 |
| 16 | Haití | 1 |



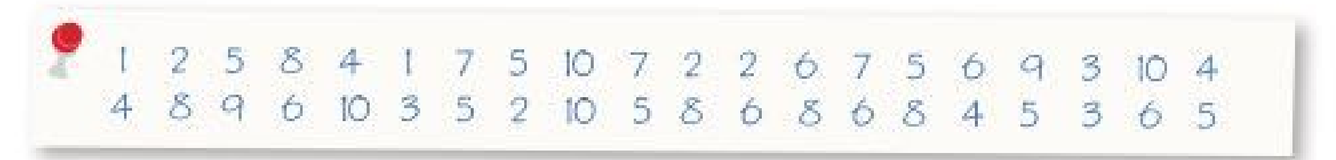

a. Usá la tabla para completar las referencias del gráfico de barras con la posición de cada equipo.

b. ¿Qué equipo convirtió menos goles? ¿Cuál convirtió más goles?

c. De todos los goles convertidos en la Copa América, ¿qué porcentaje corresponde al ganador?

d. ¿Qué países tienen igual porcentaje de goles? ¿Cuáles son esos porcentajes?

**2.** Las siguientes son las notas de los alumnos de un curso.




a. Armá una tabla de frecuencias.

b. Realizá el gráfico de la frecuencia absoluta de cada nota.

c. ¿Qué proporción de alumnos sacó 10?

d. ¿Qué porcentaje de alumnos aprobó si se aprueba con 7?

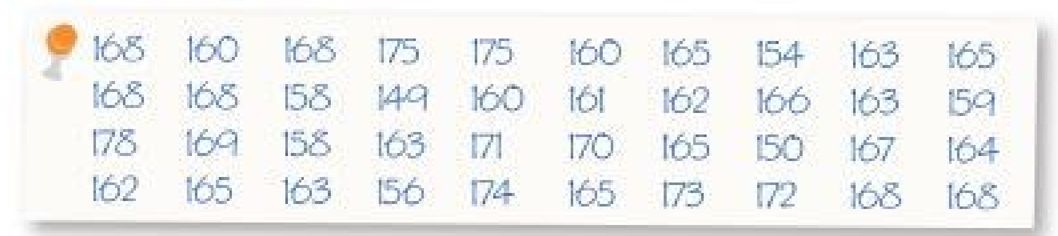
**3.** Se hizo una encuesta a un grupo de personas acerca de la cantidad de veces que asistieron al cine en los últimos dos meses. El promedio es 3.

| Cantidad de veces que asistieron al cine | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 8 | 3 | 6 | | 7 |

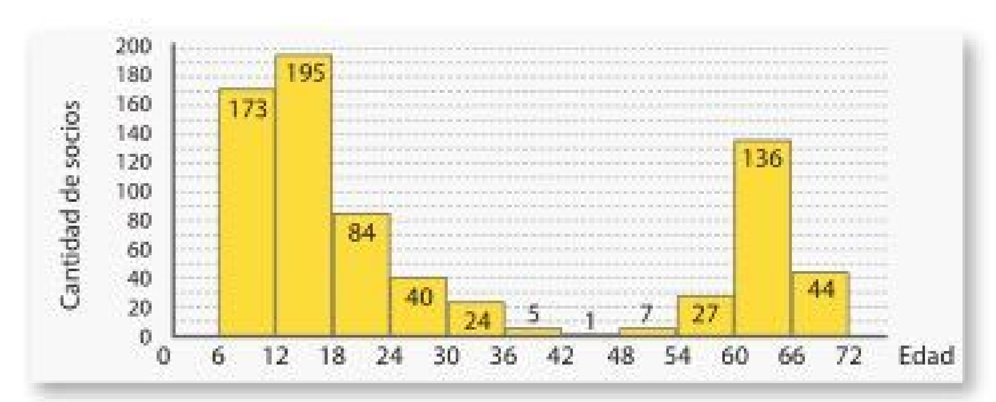
a. Completá la tabla con la frecuencia que corresponde al valor 4.

b. Determiná la moda y la mediana.

**4.** Se midió a los alumnos del curso anterior y se obtuvieron estos resultados (en cm). Si se dividen en tres intervalos: [149 ; 159), [159 ; 169) y [169 ; 179), ¿qué porcentaje le corresponde a cada uno?



**5.** Este gráfico representa las edades de los socios de un club. Calculá las medidas de tendencia central.




**6.** Se arroja un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 o un número par? ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 o un número par?

**7.** Se tira un dodecaedro con sus caras numeradas del 1 al 12 y se observa el número que sale. Decidí si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificá tus decisiones.

a. La probabilidad de que salga un número par o un número impar es la misma.

b. La probabilidad de que salga un número par mayor que 10 es $\frac{1}{12}$.

c. La probabilidad que se salga un 3 o un 4 es igual a la probabilidad de que salga un 3 más la probabilidad de que salga un 4.

d. La probabilidad de que salga un número mayor que 10 o un número par es $\frac{2}{12} + \frac{6}{12}$.

**8.** De un mazo de 48 cartas españolas se saca una al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea oro y 5?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea oro o 5?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea figura y copa?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que sea figura o copa?

**9.** Se extrae una bolilla de una bolsa en la que hay varias bolillas rojas, azules y blancas. Sabiendo que la probabilidad de extraer una bolilla roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de sacar una azul es $\frac{1}{6}$, ¿cuál es la probabilidad de extraer una bolilla blanca?

**10.** En una bolsa hay 9 bolillas rojas, 3 azules y 6 blancas.

a. Se extrae una bolilla al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

b. Se extrae una bolilla y resulta ser blanca; se la guarda en la bolsa y se extrae otra bolilla. ¿Cuál es la probabilidad de que también sea blanca?

c. Se extrae una bolilla y resulta ser blanca; se la deja fuera de la bolsa y se extrae otra bolilla. ¿Cuál es la probabilidad de que también sea blanca?

**11.** Se hace girar una ruleta y se tira una bolilla. Para responder, podés releer el lateral de la página 177.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolilla caiga en un número par?

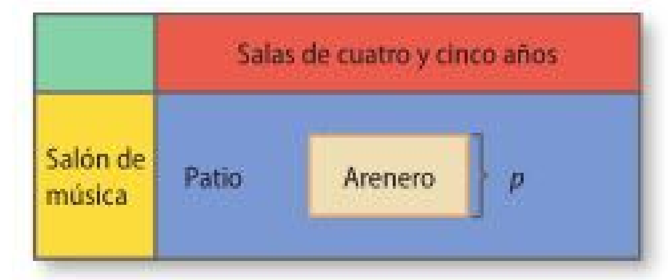
b. Si se sabe que la bolilla cayó en una casilla roja, ¿cuál es la probabilidad de que el número sea par?

c. Los sucesos "casilla roja" y "casilla con número par", ¿son dependientes o independientes? ¿Por qué?

**Función cuadrática:** problemas geométricos y relaciones cuadráticas, características del gráfico, simetría de la parábola; expresión canónica de la fórmula, lectura de información sobre la función.

# Introducción a la función cuadrática

1. En el patio de un jardín de infantes, quieren colocar listones de madera para cercar un área rectangular y armar un arenero. Los listones que usarán tienen una longitud total de 30 metros y los quieren usar todos. Se llama *p* a la longitud del lado paralelo al salón de música.




a. Si *p* es 6 metros, ¿cuál es el área del arenero?

b. ¿Es cierto que si *p* es 3 metros, el arenero tiene la mitad de área que si *p* fuera 6 metros? Explicá tu respuesta.

c. Encontrá, si es posible, tres valores de *p* para los que el área sea menor que 54 $m^2$. Luego, hallá, si es posible, otros tres para los que sea mayor que 54 $m^2$.

d. ¿Habrá otro valor de *p* para el que el área sea igual a 54 $m^2$? Explicá por qué.

## La variación de áreas: tablas y gráficos

**2.** En grupos, decidan si estas afirmaciones son verdaderas o falsas, basándose en lo analizado en la actividad 1.

a. Si el valor de $p$ es menor que 6, el área de los areneros es menor que 54 m².

b. Si el valor de $p$ es menor que 9, el área de los areneros es menor que 54 m².

c. El área de los areneros es mayor a medida que el valor de $p$ aumenta.

d. Si se arma un arenero con un valor de $p$, es posible construir un arenero con otro valor de $p$, pero con la misma área.

**3.** Se define la función A($p$) como el área (en m²) de un rectángulo de 30 m de perímetro y lado de medida $p$ (en m). En grupos, completen la tabla, de manera que los valores de $p$ estén ordenados de menor a mayor y, además, para todos haya otro valor para el cual el área del rectángulo sea la misma.

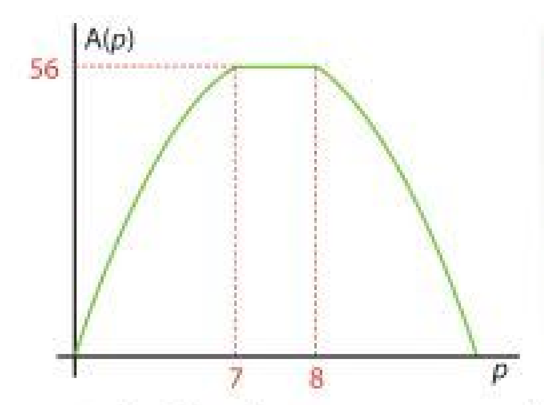
| $p$ | | 3 | | 6 | | | | 12 | 14,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A($p$) | | | | | | | | | |

Para resolver las actividades 3 y 4 pueden basarse en lo que estudiaron para los areneros en las dos actividades anteriores.

En las actividades anteriores estudiaron cómo varía el área de diferentes rectángulos de perímetro igual a 30 m a medida que varía la longitud de uno de sus lados. A diferencia de las funciones lineales, la función A($p$) que modeliza dicho proceso se caracteriza por:
- hay valores de la variable $p$ en los que A($p$) tiene la misma imagen,
- la función crece en algunos intervalos y decrece en otros.

**4.** Teresa y Rocco analizan si es posible que el gráfico de abajo represente la función A($p$). Para ello, Teresa tuvo en cuenta esta tabla, realizó unas marcas en rojo sobre el gráfico y respondió lo siguiente.

| $p$ | 0 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A($p$) | 0 | 44 | 50 | 54 | 56 | 56 | 54 | 50 | 0 |




Teresa

Este gráfico puede corresponder a la representación gráfica de A($p$), porque primero el área aumenta, luego disminuye, y entre 7 y 8 no aumenta ni disminuye, es constante, da 56.

Rocco

El gráfico no puede corresponder a la representación gráfica de A($p$), porque, si bien primero el área aumenta y luego disminuye, entre 7 y 8 el área no se mantiene constante, y el gráfico muestra una parte constante.

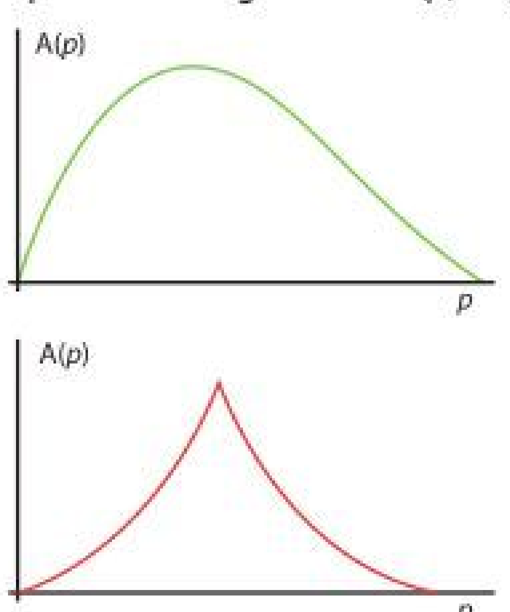
Analizá los dos argumentos y decidí quién tiene razón. Explicá tu decisión.

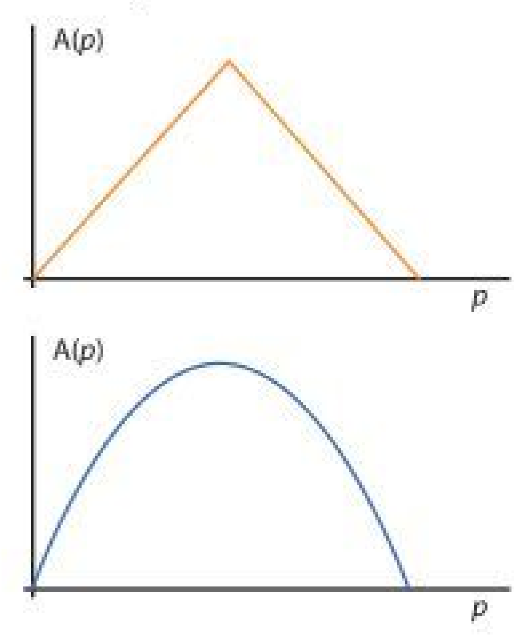
**5.** Adina armó la siguiente tabla de la función A(*p*).

| *p* | 0 | 5 | 6 | 7 | 7,4 | 7,5 | 7,6 | 8 | 9 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A(*p*) | 0 | 50 | 54 | 56 | 56,24 | 56,25 | 56,24 | 56 | 54 | 0 |

En grupos, basándose en la tabla de Adina y en las de actividades anteriores, estudien si algunos de los siguientes gráficos pueden corresponder a la representación gráfica de A(*p*). Expliquen sus respuestas.

Como hizo Teresa en la actividad 4, pueden realizar marcas sobre los gráficos, que les ayuden a elegirlos o descartarlos.




**6.** En los dos últimos gráficos de la actividad anterior, ubicá los tres puntos que corresponden a los siguientes valores de *p*: 5, 6 y 7.

El trabajo con las actividades anteriores permite precisar nuevas características de la función A(*p*).

- No varía de manera uniforme y alcanza un valor máximo en $p = 7{,}5$.
- Los valores de *p* que tienen la misma imagen están a igual distancia del *p* en el que se alcanza el valor máximo.
- Entre $p = 5$ y $p = 6$, la función crece más que entre $p = 6$ y $p = 7$.

Las dos primeras características, junto con las mencionadas en la página anterior, permiten descartar los dos primeros gráficos de la actividad 5.

La tercera característica permite descartar el tercer gráfico.

El cuarto gráfico sí cumple todas las características identificadas de la función, por lo tanto, no se lo puede descartar.

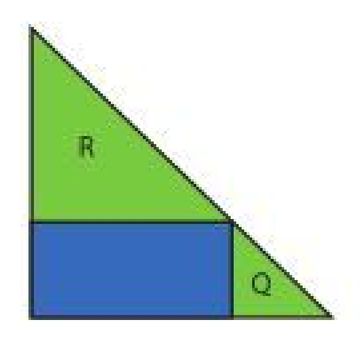
**7.** Explicá por qué las siguientes afirmaciones son verdaderas.

a. La fórmula $A(p) = p \cdot \frac{(30 - 2\,p)}{2}$ permite calcular el área de los diferentes rectángulos de perímetro 30 a partir de la medida del lado *p*.

b. Sin hacer las cuentas, se sabe que $A(4{,}5) = 4{,}5 \cdot \frac{(30 - 2 \cdot 4{,}5)}{2}$ da lo mismo que $A(10{,}5) = 10{,}5 \cdot \frac{(30 - 2 \cdot 10{,}5)}{2}$.

c. Las expresiones $p \cdot \frac{(30 - 2\,p)}{2}$, $p \cdot (15 - p)$ y $15\,p - p^2$ son equivalentes.

**8.** En un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 9 cm se inscriben rectángulos, de manera que uno de sus vértices coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y que sus otros tres vértices estén en diferentes lados del triángulo. Se forman dos triángulos R y Q. La figura muestra uno de esos posibles rectángulos.




a. Justificá por qué los triángulos R y Q son isósceles.

b. Si los catetos del triángulo R miden 2 cm, ¿cuál es el área de la zona verde?

c. Si los catetos del triángulo R miden 7,3 cm, ¿cuál es el área de la zona verde?

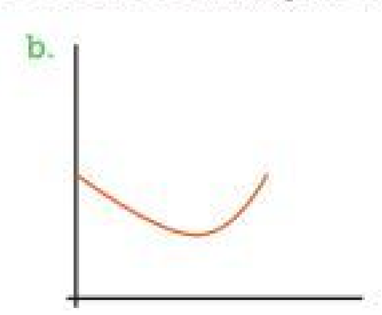
d. En grupos, encuentren, si es posible, tres medidas enteras de los catetos de R, de manera que el área de la región verde sea mayor que 27 cm².

e. Encuentren, si es posible, tres medidas de los catetos de R, de manera que el área de la región verde sea menor que 20 cm². Expliquen sus respuestas.

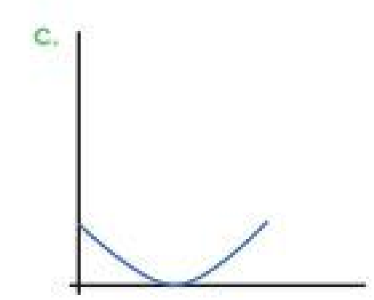
**9.** Considerá lo estudiado en la actividad anterior y explicá por qué ninguno de estos gráficos corresponde a la función B(*c*), definida como el área (en cm²) de la zona verde cuando los catetos del triángulo R miden *c* (en cm).

a.

b.

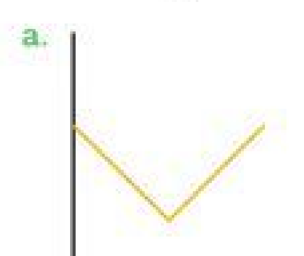


c.

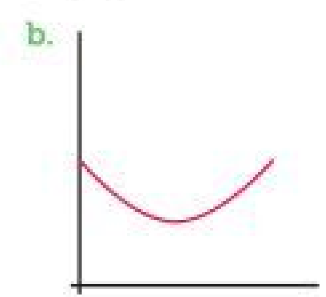


**10.** En grupos, construyan una tabla de valores que los ayude a decidir cuál de los siguientes gráficos puede corresponder a la representación gráfica de la función B(*c*) de la actividad anterior. Expliquen sus decisiones.

a.



b.



**11.** En el gráfico elegido en la actividad anterior, ubiquen algunos puntos cuyas coordenadas aparezcan en la tabla de valores que armaron.

**12.** En grupos, resuelvan las siguientes consignas referidas a la función B(*c*).

a. Expliquen por qué las siguientes fórmulas son correctas.

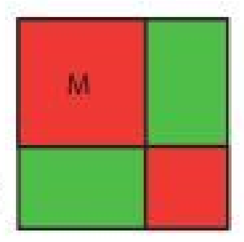
$B(c) = \frac{c^2}{2} + \frac{(9-c)^2}{2}$ $\quad$ $B(c) = 40{,}5 - c \cdot (9 - c)$

$B(c) = \frac{1}{2} \cdot [c^2 + 9 \cdot (9 - c) - c \cdot (9 - c)]$ $\quad$ $B(c) = 40{,}5 - 9c + c^2$

b. En Geogebra, ingresen una de las fórmulas en la barra de entrada y verifiquen que el gráfico obtenido sea como el que eligieron en la actividad 10.

Recuerden que GeoGebra utiliza el nombre *x* para la variable independiente de cualquier función.
Si no visualizan el gráfico en la pantalla, pueden desplazarla usando el comando "Desplaza Vista Gráfica".

**13.** En un cuadrado de 10 cm de lado se trazan dos segmentos paralelos a los lados, de manera que queden determinados dos cuadrados rojos y dos rectángulos verdes.




a. ¿Cuáles son las áreas de la región roja y de la región verde si el lado del cuadrado M mide 7 cm?

b. Considerá que $x$ es la medida del lado del cuadrado M (en cm) y armá una tabla de valores, de 2 filas y 12 columnas de la función R($x$), definida como el área de la región roja (en $cm^2$) en función de $x$. Luego, realizá un gráfico aproximado de R($x$), usando los datos de la tabla que armaste.

c. En el mismo gráfico y con otro color, graficá la función V($x$), definida como el área de la región verde en función de $x$.

d. Identificá diferencias y similitudes entre ambos gráficos y explicalas.

**14.** En grupos, usen lo realizado en la actividad anterior para resolver las consignas.

a. Sin hacer cuentas, ¿se puede asegurar que R(4,1) = R(5,9)? Expliquen por qué.

b. Marquen en el gráfico de la actividad anterior el punto que corresponde a R(2,5) y tracen una recta horizontal que pase por ese punto. ¿Cuáles son las coordenadas del otro punto de intersección entre la recta y el gráfico de R($x$)?

c. En cada caso, completen con diferentes valores de $x$, de manera que las igualdades resulten verdaderas.

R(............) = R(8,3) R(7,2) = R(............) R(............) = R(............)

d. Marquen en el gráfico de la actividad anterior, de manera aproximada, los 6 puntos que resultaron de la consigna anterior.

e. Escriban una fórmula para R($x$).

f. Haciendo cuentas con la fórmula que armaron en la consigna anterior, verifiquen las respuestas que dieron en los tres primeros ítems.

g. Usen la fórmula de R($x$) para hacer su gráfico con GeoGebra. Luego, compárenlo con el que hicieron en la actividad 13.

**15.** Resuelvan las consignas de la actividad 14, pero estudiando la función V($x$).

Las funciones de las actividades anteriores, A($p$), B($c$), R($x$) y V($x$), relacionan la medida de algún segmento con el área de una figura. Los gráficos de esas funciones son curvas de forma similar. Esas curvas se denominan **parábolas**.
Las fórmulas de las cuatro funciones, si se desarrollan las cuentas dentro y fuera de los paréntesis, resultan con la misma forma general:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \text{ con } b \text{ y } c \text{ números cualesquiera y } a \neq 0$$

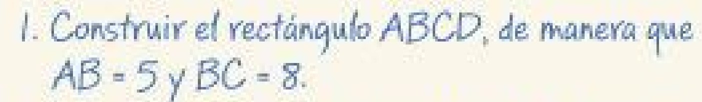
Las funciones que tienen una fórmula de ese tipo se denominan **funciones cuadráticas**, porque la variable $x$ aparece al cuadrado.

Una parábola tiene un **vértice** que corresponde al mínimo o al máximo de la función.

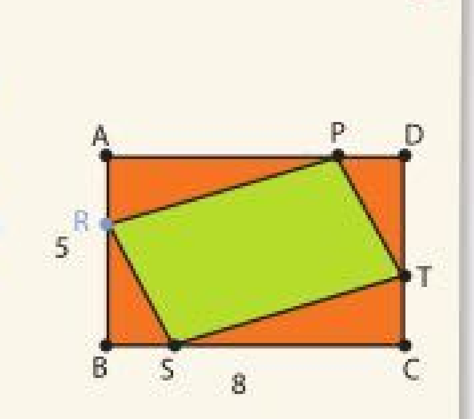



## Estudio de situaciones geométricas con GeoGebra

**16.** a. En grupos, sigan las instrucciones para realizar la siguiente construcción dinámica en Geogebra.



1. Construir el rectángulo ABCD, de manera que AB = 5 y BC = 8.
2. Marcar un punto R sobre el lado AB, un punto S sobre el lado BC, un punto T sobre el lado CD y un punto P sobre el lado DA, de manera que al mover el punto R siempre se cumpla que AR = BS = CT = DP. Pueden usar el comando Circunferencia (centro,radio) e introducir AR como valor del radio.
3. Definir el cuadrilátero RSTP usando el comando Polígono y hacer visible su área.

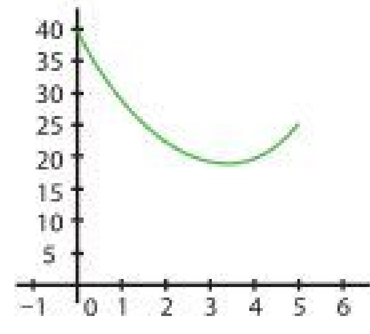



Podés releer la página 58 para recordar cómo funcionan algunos comandos de GeoGebra.

b. Justifiquen que, para cualquier posición del punto R, el cuadrilátero RSTP es un paralelogramo.

c. Encuentren, si es posible, dos longitudes de $\overline{AR}$, de manera que los cuadriláteros RSTP formados tengan igual área.

d. Marisa dice que este es el gráfico de la función j(*x*), definida como el área del cuadrilátero RSTP en función de *x*, que es la medida de $\overline{AR}$. Hernán dice que ese no es el gráfico, porque le falta una parte. Decidan quién tiene razón y expliquen su decisión.




Pueden estudiar la situación usando los cuadriláteros dinámicos que construyeron con GeoGebra en la primera consigna.

e. En el gráfico anterior, ubiquen dos puntos, V y W, que correspondan a dos cuadriláteros formados que tengan igual área. Expliquen cómo los ubicaron.

f. En el gráfico anterior, indiquen, si es posible, un valor de la variable *x* tal que no haya otro valor de *x* que tenga la misma imagen.

**17.** Resuelvan en parejas. En el archivo de GeoGebra que crearon en la primera consigna de la actividad anterior, abran la Vista gráfica 2 y definan el punto Q = (AR, polígono1). Muevan el punto R en la Vista gráfica 1 para lograr diferentes puntos Q en la Vista gráfica 2, que pertenecen al gráfico de j(*x*). Luego, con el botón derecho del mouse, hagan clic en Q, activen su rastro y muevan el punto R.

a. Comparen el gráfico que genera Q con el dado en la actividad anterior.

b. ¿Cuáles son las coordenadas del punto con mayor abscisa al que llega Q?

c. Considerando el rastro de Q, respondan, aproximadamente, cuál es el valor mínimo de j(*x*) y en qué valor de *x* se alcanza.

En vez de buscar la fórmula del área del paralelogramo en función de la medida de AR, se usan otras herramientas de GeoGebra para hacer el gráfico. Estas herramientas ya las usaron en el capítulo 4.

## Lectura de información en la fórmula canónica

**18.** Verónica y Pablo son socios en una empresa familiar de venta de ropa. Ella diseña y confecciona las prendas, y él lleva la contabilidad. Teniendo en cuenta los costos fijos y las horas de trabajo que lleva la confección de la última prenda diseñada, Pablo arma la siguiente fórmula, que permite calcular la ganancia mensual que tendrían por la venta de esa prenda en función de su precio.

$$G(p) = 6.400 - \frac{1}{4} \cdot (p - 310)^2$$

a. Verónica propone cobrar $230 la prenda. ¿Cuál sería la ganancia mensual?

b. Pablo no está de acuerdo con ese precio, porque quiere aumentar la ganancia. ¿A qué precio podrían cobrar la prenda?

c. ¿Habrá otro precio con el que se obtenga una ganancia de $4.800?

d. ¿Habrá algún precio con el que la ganancia sea de $2.175? ¿Y de $6.900?

e. Pablo dice que, sin realizar las cuentas de la fórmula, se puede saber que si se cobra $300, se va a ganar lo mismo que si se cobra $320. Analizá si la afirmación de Pablo es cierta. Explicá tu respuesta.

f. ¿Cuál es la ganancia máxima que se puede obtener? ¿Qué precio debería tener la prenda para obtener la máxima ganancia al venderla?

**19.** En grupos, resuelvan las consignas para estudiar la función $r(x) = (x - 4)^2 + 3$.

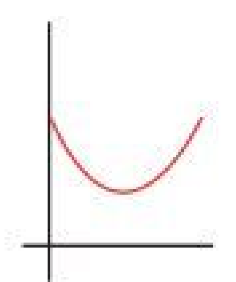
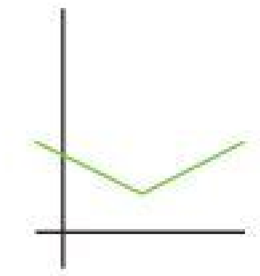
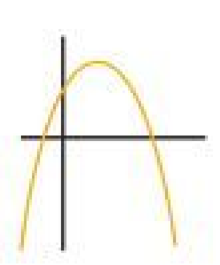
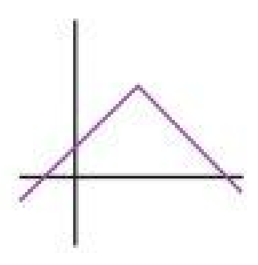
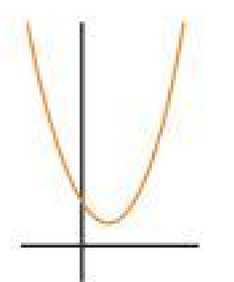
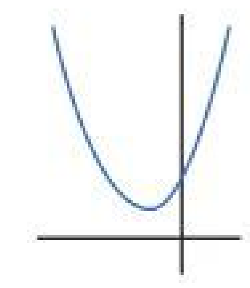
a. Calculen $r(-3)$ y analicen si existen otros valores de $x$ que tengan la misma imagen que $-3$. Si existen, indiquen cuántos valores pueden encontrar.

b. Analicen si existen valores de $x$, de manera que $r(x) = 28$. Si existen, indiquen cuántos valores pueden encontrar.

c. Resuelvan la consigna anterior para $r(x) = 2$, luego para $r(x) = 7$, y para $r(x) = 5$.

d. Encuentren otro par de valores de $x$ que tenga la misma imagen en r.

e. Estudien cuáles de estos gráficos podrían corresponder a la función $r(x)$. Expliquen sus decisiones.

**20.** Analizá si estas afirmaciones, referidas a la función $g(x) = -(2x + 6)^2 - 1$, son verdaderas o falsas. Explicá tus decisiones. Realizá un gráfico aproximado de $g(x)$.

a. $g(2) = -99$

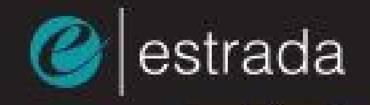
b. Hay dos valores de $x$ tales que $g(x) = -1$.

c. $g(-1) = g(-5)$

d. Hay dos valores de $x$ tales que $g(x) = -6$.

e. $g(x) = -26$ solo si $x = -\frac{1}{2}$

f. $g(x)$ alcanza su valor máximo en $x = -3$.



En las actividades 18, 19 y 20 estudiaron funciones a partir de sus fórmulas. Estas tenían una forma que les permitía leer cierta información. Si se desarrollan los cuadrados de esas fórmulas, se puede comprobar que las funciones son cuadráticas.
La forma que tienen es:

$$a \cdot (x + d)^2 + f \text{, con } d \text{ y } f \text{ números cualesquiera y } a \neq 0,$$

que se llama **forma canónica** de la fórmula de una función cuadrática.
A partir de esa expresión, pudieron leer información y concluir lo siguiente acerca de las funciones cuadráticas.

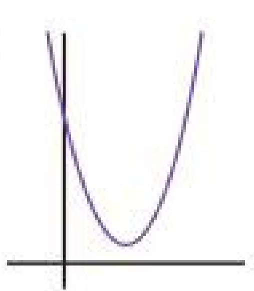
- Tienen un mínimo o un máximo.
- Sus gráficos tienen la misma forma, que es la parábola, y su vértice corresponde al mínimo o al máximo de la función.
- Para todo valor de la variable independiente, excepto el que corresponde al vértice, hay otro valor de la variable que tiene la misma imagen.



**21.** En grupos, decidan, para cada gráfico, si puede corresponder a alguna de estas fórmulas. Expliquen sus decisiones en la carpeta.

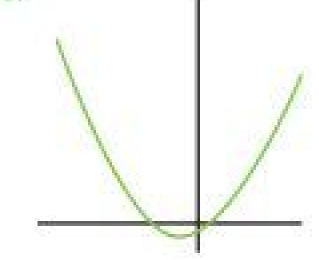
$a(x) = (x + 3)^2 - 5$ $\quad b(x) = 4 \cdot (x - 3)^2 + 5$ $\quad c(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + 3)^2 + 5$

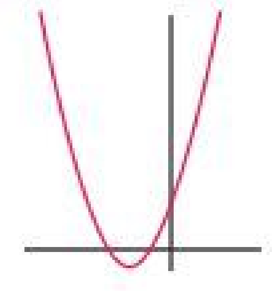
$d(x) = \frac{1}{3} \cdot (x + 3)^2 - 7$ $\quad e(x) = -6 + (x + 3)^2$ $\quad f(x) = -4 + 4 \cdot (x + 2)^2$

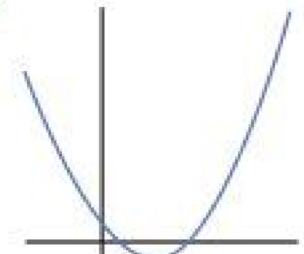
a.

..............................

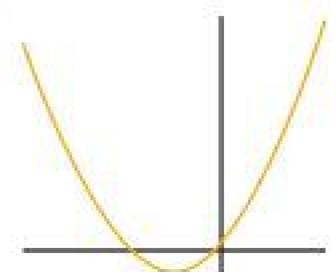
b.

..............................

c.

..............................

d.

..............................

e.

..............................

f.

..............................

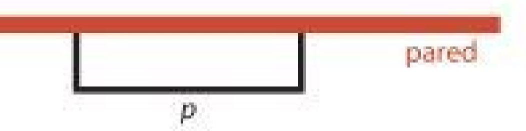
**22.** En parejas, resuelvan en la carpeta las siguientes consignas, que están relacionadas con la actividad anterior.

a. Si se sabe que el cuarto gráfico pasa por (– 3 ; 0), ¿cuáles de las fórmulas de esa actividad pueden corresponder a ese gráfico? ¿En qué lugar del gráfico ubicarían ese punto? Expliquen su decisión.

b. Den las coordenadas de otros tres puntos que pertenezcan a ese gráfico.

## Más actividades

**1.** Clara y Héctor quieren cerrar un área rectangular para construir un corral para sus cabras, aprovechando una pared existente. Disponen de 25 metros de tejido metálico para cercar los tres lados del rectángulo y lo quieren usar todo. Se define *p* como la longitud del lado paralelo a la pared.




a. Si quieren que *p* mida 15 metros, ¿cuál será el área del corral?

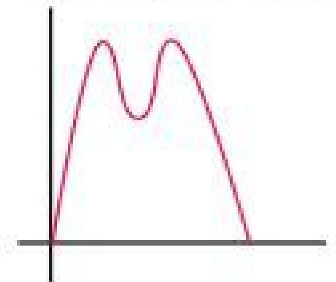
b. Encontrá, si es posible, tres valores de *p* para que el área del corral sea menor que 75 $m^2$ y tres valores de *p* para que el área del corral sea mayor que 75 $m^2$.

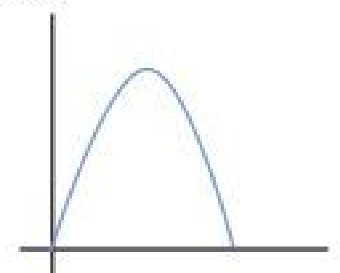
c. ¿Habrá algún otro valor de *p* para que el área sea igual a 75 $m^2$? Explicá tu respuesta.

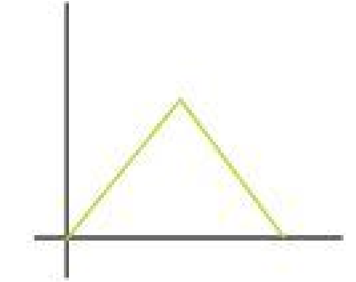
d. Completá la tabla.

| *p* | 0,5 | 2 | 4 | | 10 | 12,5 | 15 | 16 | | 24,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área del corral | | | | | | | | | | |

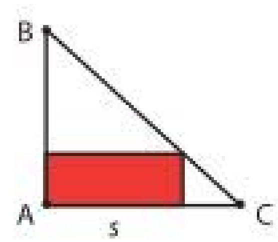
e. Para cada gráfico, da, si es posible, dos razones por las que podría corresponder a la función área del corral y dos por las que no podría.







**2.** Se inscriben rectángulos en un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 9 cm, de manera que un vértice del rectángulo coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y sus otros tres vértices se encuentren en diferentes lados del triángulo. La figura muestra uno de esos posibles rectángulos.

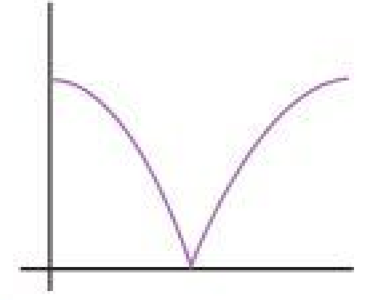


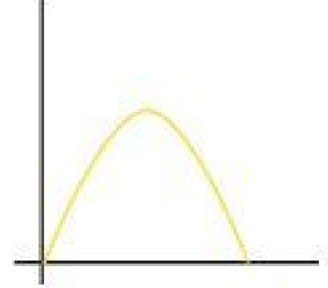

a. Si el lado *s* del rectángulo mide 2 cm, ¿cuál es el área del rectángulo?

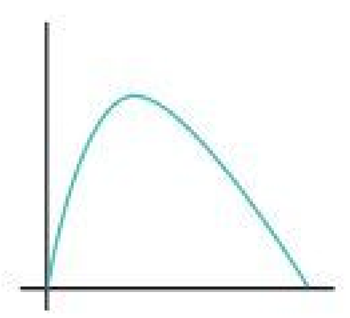
b. Si *s* mide 7,3 cm, ¿cuál es el área del rectángulo?

c. Encontrá, si es posible, tres medidas enteras del lado *s*, de manera que el área del rectángulo sea mayor que 4,5 $cm^2$, tres valores de *s* para que el área sea menor que 4,5 $cm^2$ y tres para que sea igual a 4,5 $cm^2$.

d. Se define T(*s*) como el área del rectángulo en función de la medida del lado *s*. Para cada gráfico, si es posible, da un argumento por el cual podría corresponder a la representación gráfica de T(*s*) y otro por el cual no podría.

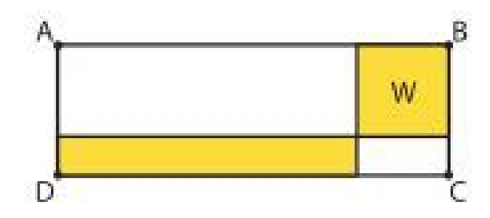






e. Encontrá dos fórmulas para la función T(*s*).



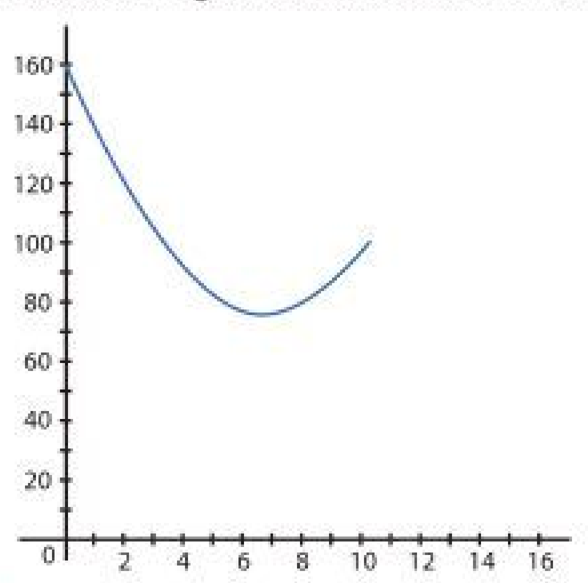



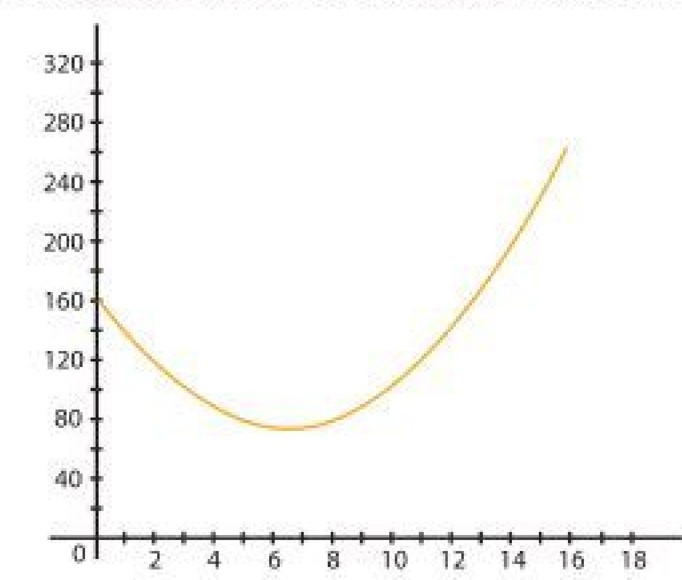

**3.** El rectángulo ABCD tiene lados de 10 cm y 16 cm. Se trazan dos segmentos paralelos a los lados, de manera que se forme un cuadrado W con vértice en B y un rectángulo con vértice en D. Se define *p* como la longitud del lado del cuadrado W (en cm). Para responder las siguientes consignas, podés usar GeoGebra para construir el cuadrado W de manera que sea dinámico.

a. Calculá el área de la región sombreada de amarillo y de la región no sombreada si *p* es 6 cm.

b. Estudiá cómo varía el área de la región sombreada a medida que varía *p*.

c. Decidí cuáles de los siguientes gráficos pueden corresponder a la función S(*p*), definida como el área de la región sombreada (en $cm^2$) cuando la longitud del lado del cuadrado W es *p* (en cm).




d. Realizá un posible gráfico de la función definida como el área de la región no sombreada en función de *p*.

**4.** Resolvé las siguientes consignas sobre la función t(*x*), dada por la fórmula $t(x) = -3 \cdot (x + 5)^2 + 3$.

a. Calculá t(−7) y analizá si existen otros valores de *x* para los cuales se obtenga el mismo valor que t(−7). ¿Cuántos valores de *x* podés encontrar?

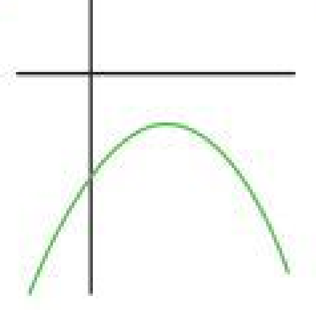
b. Analizá, si existen, valores de *x* de manera que t(*x*) = 3. ¿Cuántos valores de *x* podés encontrar? ¿Y para t(*x*) = 7? ¿Y para t(*x*) = 0?

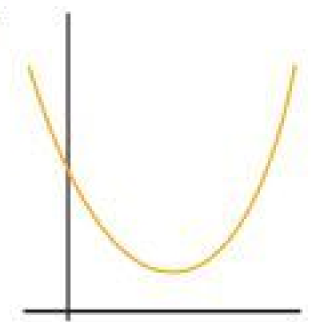
c. Hallá el valor máximo que toma la función y en qué valor de *x* se alcanza. Justificá tu respuesta.

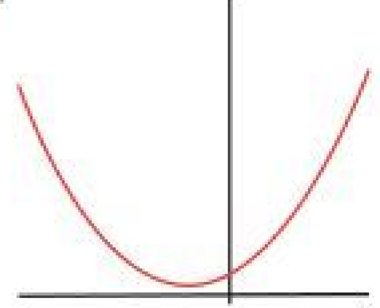
d. Realizá un gráfico aproximado de t(*x*).

**5.** Decidí qué gráfico corresponde a cada fórmula. Explicá tus decisiones.

$a(x) = -(x - 2)^2 - 7$ $\quad b(x) = 2 \cdot (x - 5)^2 + 6$ $\quad c(x) = 3 + \frac{1}{2} \cdot (x + 5)^2$ $\quad d(x) = -7 - 2 \cdot (x - 3)^2$

a.


b.


c.


d.
